Philos. N 64.

BIBLIOTHECA
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

Phillips Acad. Math. P 268*

(268 d h k m

Mathesis. Geometria generalis

273.

Silv. Franc. Lacroix's
Anfangsgründe
der
Geometrie.

Nebst
einer Abhandlung
über die in diesen
Anfangsgründen zu befolgende Ordnung,
über die Art sie abzufassen,
und über die
Methode in den mathematischen Wissenschaften
überhaupt.

Aus dem Französischen übersetzt
und mit
Anmerkungen und Zusätzen begleitet
von
E. M. Hahn,
Königl. Preuß. Kammerkondukteur.

Mit 7 Kupfertafeln.

Berlin, 1806.
In der Frölichschen Buchhandlung.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Hochwohlgebohren

dem Herrn

Ewald von Massow,

Königl. Preuß. Geheimen Ober-Finanzrath, Präsidenten der Königl. Krieges- und Domainenkammer zu Groß-Glogau, Erbherrn auf Kutschlau, Neuguth ꝛc.

widmet

dieses Buch

als einen

geringen Beweis der tiefsten Verehrung

der Uebersetzer.

Vorbericht.

Der nach diesem Werke seit mehreren Jahren ertheilte Unterricht, hat mich nur bewogen, mich desto mehr an der den Sätzen gegebenen Ordnung zu halten. Ich glaube, daß diese Ordnung zugleich natürlich und strenge ist; auch betreffen die Abänderungen der gegenwärtigen und der ihr vorhergehenden Ausgabe, nur die Verbesserung und Vervollkommnung einiger Details.

Wenn man gleich, indem ich mir vorgesetzt, so viel als möglich der Verknüpfung der Ideen zu folgen, in diesen Anfangsgründen einige Spuren

der analytischen Methode erblicken sollte, so bin ich nichts desto weniger überzeugt, sie nach dem Styl der Alten abgefaßt zu haben, weil ich immer darauf bedacht war ihrer Beweisart zu folgen, mich so wie sie gethan, an der Strenge der Vernunftschlüsse zu halten, und um dies zu erreichen, nur aus der Natur des Gegenstandes genommene Mittel anzuwenden. Ich halte keinesweges dafür, daß ein Fehler wider die Ordnung, so wie man ihn in Euklides Elementen antrift, und welcher die Sätze mehr unabhängig macht, daß eine große Anzahl ins Absurde gehender Reductionen, und stets dogmatischer Formen, welche den Geist der Leser zu befestigen scheinen, indem sie ihn über das ihm vor Augen gelegte hinauszublicken verhindern, endlich daß verjährte Ausdrücke, welche der Geometrie das sind, was die juristischen Formeln der Vernunft sind, die wesentlichen Eigenschaften der synthetischen Methode sind, und ihre beträchtlichsten Vorzüge ausmachen.

Ich glaube im Gegentheile, daß man in einer Epoche, wo die Sprache der Wissenschaften, von allen pedantischen Formen befreyet, dadurch mehr Reinheit gewonnen, und von ihrem trocknen Wesen verloren hat, sich wohl hüten muß, die Fehler nachzuahmen, die seit dem siebenzehnten Jahrhundert im Gange waren, und in welche die ältern Verfasser gewiß nicht verfallen wären, wenn sie zu unsrer Zeit gelebt hätten.

Man wird vielleicht in dieser Ausgabe einige Sätze vermissen, die man in der ersten zu wünschen geschienen; zum Beyspiel die Zerlegung der abgekürzten Pyramide in drey andre. Hierauf erwiedere ich, daß das Volumen des Abschnitts der Pyramide sogleich berechnet ist, wenn man die Höhe der ganzen Pyramide sucht, welches sehr einfach ist, und sich leichter auf den abgekürzten Kegel anwenden läßt. Dieses in Betreff der Ausübung. Was die Beweisart anbelangt, bemerke ich, daß der Satz

in Betreff der Ausmessung des dreyseitigen abgekürzten Prisma, den ich sorgfältig entwicket habe, ebenfalls auf der Zerlegung eines Körpers in Theile und auf ihrer Verwandlung in andre ihnen gleiche beruht, und daß ein einziges Beispiel hinreicht, wenn es nur gut gewählt ist. Ueberhaupt müßte man, wenn man alle Aufgaben, welche entweder durch ihren Vortrag oder durch ihre Beweisart nett zu seyn scheinen könnten, zusammentragen wollte, ein Buch abfassen, welches vielleicht den Lesern, die die geometrischen Spekulationen lieben, und ihr die die gehörige Zeit widmen können, angenehm, aber viel zu umfassend seyn würde, um als Lehrbuch beym Elementarunterricht gebraucht werden zu können. Man kann es nicht oft genug wiederholen: je größere Fortschritte die Wissenschaften machen, desto mehr muß man auf ausführliche Auseinandersetzungen Verzicht leisten, um den Unterricht auf den Standpunct zu bringen, auf welchen er sich erheben muß,

und um deſſen Ausdehnung der der Erziehung bestimmten Zeit anzumäßigen.

Die Vergleichung verſchiedener Methoden, die mir ein langer Verſuch im Unterricht anzuſtellen Gelegenheit gegeben, hat die Wahl der Sätze beſtimmt. Die Ordnung, in welcher ſie fortgehen, und die Betrachtungen, durch welche ſie mit einander verbunden ſind, zeigen dem aufmerkſamen Leſer hinreichend die Regeln, die ich in meiner Arbeit befolgt habe, und ſie werden ohne Zweifel bemerken, daß die Anmerkungen, welche für die in die Elementargeometrie ſchon eingedrungenen Leſer beſtimmt ſind, die Entwickelung einiger ſchwierigen Puncte enthalten, welche ſie darbiethet, und welche in den zu Ende dieſer Vorrede auseinandergeſetzten Betrachtungen angezeigt ſind.

Durch dieſe Anmerkungen können die Lehrer von den verſchiedenen Beweisarten diejenigen wählen, welche ihrem Zwecke am angemeſſenſten ſind;

und sie werden ohne Zweifel bemerken, daß der größte Theil den ersten Zeiten der Geometrie zugehört, wo man mit Recht einigen Werth auf die Strenge der Beweise setzte.

Ob ich es gleich für angemessener halte die Geometrie nach der Algebra als vor derselben zu lehren, so habe ich doch, da gewisse Umstände das Gegentheil nothwendig machen könnten, zu Ende des Innhalts ein nöthiges Supplement gegeben, um die in den Anfangsgründen der Arithmetik abgehandelte Theorie der Proportionen in Beziehung auf die Geometrie zu ergänzen.

Betrachtungen über die in den Anfangsgründen der Geometrie zu befolgende Ordnung, über die Art sie abzufassen und über die Methode in der Mathematik.

Erster Theil.

Von den Anfangsgründen der Geometrie.

Die erleuchtesten Männer sind heut zu Tage über die Schwierigkeit, gute Elementarbücher abzufassen, einverständig, in welcher Wissenschaft es auch sey. Ich würde nicht über die Form geschrieben haben, welche mir denen der Geometrie zu geben am angemessensten scheint, wenn der Gegenstand mir nicht sowohl durch die Betrachtungen, welche d'Alembert in seinen Mélanges de Littérature darüber anstellt, als durch die seit dieser Zeit erschienenen Werke ziemlich ausgeführt schien, von denen mehrere aus der Feder der ausgezeichnetesten Geometer geflossen sind. Pascal, durch den philosophischen Theil seiner Ge-

danken stets bewundernswerth, hat Regeln gegeben, deren Befolgung sehr leicht scheint, welche aber die meisten Verfasser der Anfangsgründe der Geometrie vernachläßigt haben. Diese Regeln sind:

1) Nicht zu unternehmen eine Sache zu erklären, welche an und für sich so bekannt ist, daß man zu ihrer Erklärung keine deutlichere Ausdrücke hat.

2) Keine nur einigermaßen dunkle oder zweydeutige Ausdrücke ohne Definition zu brauchen.

3) In den Definitionen nur völlig bekannte oder schon erklärte Ausdrücke zu zulassen.

4) Keins der nöthigen Prinzipien zu zulassen. ohne gefragt zu haben, ob man es auch annimmt, so klar und evident es auch seyn könnte.

5) Unter den Grundsätzen nur an und für sich völlig evidente Sachen aufzunehmen.

6) Nicht zu unternehmen, eine Sache zu beweisen, welche an und für sich so klar ist, daß man sie durch den Beweis nicht mehr aufklären kann.

7) Alle auch nur einigermaßen dunkle Sätze zu beweisen, indem man zu ihrem Beweise nur an und für sich evidente Grundsätze oder schon bewiesene und angenommene Sätze anwendet.

8) Von der Zweydeutigkeit der Ausdrücke keinen Mißbrauch zu machen, indem man die Defini-

tionen hinweg läßt, welche sie einschränken und ihren Sinn erklären *).

Was diejenigen, welche gegen einige dieser Regeln gesündigt haben, entschuligen kann, ist vielleicht die Schwierigkeit den Punct aufzufinden, in welchem sich alle diese concentriren, weil einige derselben anfänglich wiedersprechend scheinen; es giebt indessen ein sicheres Mittel, die Sätze, welche eines Beweises bedürfen, von denen zu unterscheiden, welche, indem sie unmittelbar von öftern Eindrücken auf die Sinne herrühren, und eigentlich zu reden, durch Erfahrung gegeben sind, nur in dem Geiste des Lesers zurückgerufen zu werden brauchen. Wenn der Satz, dessen Wahrheit man darthun will, an und für sich evident ist, so wird man ihn, wenn auch nur verborgen, in den Schlüssen wieder finden, welche man um ihn zu beweisen anwendet; und die genaue Zergliederung dieser Schlüsse wird immer einen falschen Zirkel darbiethen. Um sich hiervon zu überzeugen darf man bloß in Erwägung ziehen, daß alle unsre Er-

---

*) Das Stück, aus welchem die obigen Regeln gezogen sind, ist in einer im Jahre 1776 durch Condorcet gelieferten Ausgabe der Gedanken des Pascal zum ersten Mahl erschienen, welche durch dessen Anmerkungen sehr merkwürdig ist, und in welcher man auch eine von Turgot abgefaßte Lebensbeschreibung des Pascal findet.

Kenntnisse in dem Empfindungsvermögen ihren Ursprung haben. Unsre Seele an und für sich scheint bloß die Fähigkeit zu besitzen, diese Empfindungen aufzunehmen, sich derselben bewußt zu werden, sie mit einander zu vergleichen und daraus Verhältnisse herzuleiten, oder, welches auf eins hinaus kommt, individuelle oder besondre und allgemeine oder abstracte Urtheile zu fällen. Es wäre daher thöricht, wenn man suchen wollte das unmittelbare Resultat der Empfindung zu definiren, welche uns den kürzesten Weg anzeigt, um von einem Puncte zum andern zu kommen. Man bezeichnet diesen Weg durch den Nahmen der **geraden Linie**, und nur auf den Vortrag dieser Eigenschaft muß sich die Definition der geraden Linie beschränken, welche Definition unter diejenigen gezählt werden muß, die sich bloß auf die Wörter erstrecken *).

---

*) Ich will jedoch hiermit keinesweges die Verfasser zurücksetzen, welche auch die ersten Begriffe zu zergliedern gesucht, und sie von verschiedenen Seiten dargestellt haben, aus welchen man sie noch nicht betrachtet hatte. Der Bürger Bertrand scheint mir einer von denen zu seyn, deren Arbeiten in dieser Rücksicht das meiste Glück gemacht haben. Er fängt den zweyten Band seiner neuen Entwickelung des elementarischen Theils der Mathematik mit sehr lichtvollen Betrachtungen über den Raum, die Ebne und die gerade Linie an. Nachdem er bemerkt hat, daß der Raum nothwendigerweise

Als die Disputirsucht allenthalben ihre größte Gewalt erreicht hatte, und die von einigen seyn wol-

---

homogen ist, das heißt, „daß der Theil des Raums, den ein „Körper in einem Orte einnimmt, nicht von demjenigen un„terschieden ist, welchen er anderswo einnimmt, daß der um „einen auf irgend einer Art gelegenen Körper befindliche „Raum mit demjenigen einerley ist, welcher sich um eben die„sen aber anders gelegten Körper befindet," setzt er hinzu: „Aus diesem Begriffe vom Raume folgt, daß man sich den„selben in zwey solche Theile zerlegt denken kann, daß „man nichts von dem einen sagen kann, was nicht auch „vom andern gelten sollte; ferner in solche, daß ihre ge„meinschaftliche Gränze zu jedem derselben dieselben Be„ziehungen haben; es sey, daß man sie in ihrer ganzen „Ausdehnung, oder nur einen Theil derselben betrachtet. „Diese Gränze ist es, welche man eine Ebne nennt; und die „Ebne kann so wie der Raum in zwey solche Theile zerlegt „gedacht werden, daß man nichts von dem einen sagen „kann, was sich nicht auch vom andern sagen ließe; fer„ner in solche, daß ihre gemeinschaftliche Gränze zu je„dem derselbe einerley Beziehungen habe; es sey, daß man „sie in ihrer ganzen Ausdehnung oder nur einen Theil „derselben betrachtet."

Es scheint mir, daß man die in den eben citirten Betrachtungen zum Grunde liegende Hauptidee folgendermaßen darstellen kann. Die beiden Seiten einer Ebne sind einander ähnlich, das heißt, wenn man zwey Ebnen dergestalt auf einander legt, daß man irgend eine beliebige Seite der einen gegen eine beliebige Seite der andern legt, so werden sie genau auf einander fallen und gar keinen Raum zwischen sich lassen, welches nicht bey zweyen Flächen geschehen kann, die nicht eben sind. Dieselbe Eigenschaft kommt der geraden Linie zu und unter-

lenden Philosophen vervielfältigten Sophismen die Existenz des Raums, der Körper und der Bewegung zweifelhaft machten, erhob sich eine Menge von Schwierigkeiten über die Natur der Ausdehnung,

---

scheidet sie von den krummen Linien; denn wenn die Linien AB und ab auf einander fielen, indem man die convexe Seite der einen auf die concave Seite der andern legt, so würden sie es aufhören zu thun, wenn man die ähnlichen Seiten umkehrte, und einen Raum C zwischen sich fassen. Hieraus folgt, daß alle Theile einer Ebne oder einer geraden Linie den Theilen eben dieser Ausdehnung in jeder andern Ebne oder geraden Linie ähnlich sind, was auch übrigens diese Ausdehnung seyn mag; aber diese letztere Eigenschaft kommt auch überdies den mit einerley Halbmesser beschriebenen Kreisen oder Kugeln zu.

Von diesen Definitionen ausgehend hat der Bürger Bertrand verschiedene Sätze bewiesen, welche nur vermittelst ihrer bewiesen werden können, und welche man als Axiome anzusehen gewohnt ist; unter andern, daß die gerade Linie der kürzeste Weg sey, um von einem Puncte zum andern zu kommen. Ungeachtet dieser Vortheile, welche auch aus der von Laplace im Journal des séances de l'Ecole Normale gegebenen Definition erfolgen, so bin ich dennoch bey dem einmahl eingeschlagenen Wege geblieben, weil ich überzeugt bin, daß die Kürze der geraden Linie eben so wie die andern Definitionen, die man von dieser Linie geben kann, zu den ersten Begriffen gehört, und noch an und für sich einfacher ist. Ich rathe indessen den Lesern, welche in die Prinzipien der Elementargeometrie und Analysis eindringen wollen, das Werk des Bürgers Bertrand zu Rathe zu ziehen, welchem ich mehrere wichtige Ideen verdanke.

welche als der Gegenstand der Geometrie betrachtet wurde. Nichts von dem, was nicht Körper ist oder was nicht zum Körper gehört, fällt uns in die Sinne; einem Körper kann keine seiner drey Dimensionen genommen werden, ohne daß er zu existiren aufhöre; und gleichwohl betrachtet man successiv den Punct, als hätte er gar keine Ausdehnung, die Linie als bloß nach der Länge ausgedehnt, und die Fläche als von der Höhe entblößt, und nur nach der Länge und Breite ausgedehnt.

Man hat sehr lange darüber gestritten, ob nicht etwa die Puncte, Linien und Flächen nur abstracte Ideen sind und ausser uns gar keinen Gegenstand haben. Einige falsche Geister, von subtilen Raisonnements irre geleitet, haben die Gewißheit und den Nutzen der Geometrie in Zweifel gezogen, indem sie sich auf die Nichtexistenz der Theile der Ausdehnung stützten, deren Eigenschaften sie lehrt. Mir scheint, daß man diesen Schwierigkeiten vorbeugen kann, wenn zu Anfange eines Elementarwerks gezeigt wird, daß der Punct, die Linie und die Fläche wirklich existiren, wenn sie gleich nicht abgesondert vom Körper wahrgenommen werden können, dessen Attribute sie sind. Denn man mag was für einen Körper man will betrachten, so muß er nothwendigerweise begränzt seyn, ohne welches er vom unbegränzten

Raum nicht unterschieden werden könnte. Die Gränzen, welche ihn einschließen, sind Flächen, welche wiederum Linien zu Gränzen haben, und diese letztern haben wiederum an und für sich Puncte zu Gränzen. Diese Gränzen existiren nicht nur, sondern sie fallen uns auch in die Sinne, weil wir nur vermittelst ihrer die Figur des Körpers erkennen. Da wir diese Figur nur modificiren können, so werden alle unsre Operationen immer auf Körpern und niemals auf Linien oder Flächen ausgeführt; allein ihr Resultat entfernt sich desto weniger von dem der Vernunftschlüsse, je mehr wir Sorge tragen, die der auf dem Körper betrachteten Gränze fremdartigen Dimensionen zu vermindern.

In Gedanken erreichen wir diese Gränzen und durch den Calcul können wir uns denselben unendlich nähern, indeß die Genauigkeit der graphischen Operationen in der unvermeidlichen Unvollkommenheit der Instrumente ihre Gränzen finden.

Die vorhergehenden Betrachtungen würden sehr schicklich zu Anfange der Anfangsgründe der Geometrie ihre Stelle finden, wofern man ihnen nur nicht zu viele Ausdehnung gäbe, um nicht in Abschweifungen zu verfallen, die den Hauptgegenstand den Augen entziehen würden.

Wenn der Begriff von der Ausdehnung, so weit es die Natur des Gegenstandes erfordert, hinlänglich untersucht ist, so gehe man zu dem Gegenstande durch die kleinste Anzahl der zur Verständlichkeit der ersten Sätze nöthigen Definitionen über; denn es ist unnütz und sogar lächerlich zu Anfange eines Werks die Grundsätze herzuzählen, weil diese an und für sich evidente Sätze von jedem richtigen Kopf gleich beym Vortrage derselben für solche angesehen werden müssen, und er folglich im Fortgange irgend eines Beweises nicht dadurch aufgehalten werden kann.

Unter den Definitionen, die für jetzt zu geben nöthig wären, verdient die des Winkels die größte Aufmerksamkeit; man findet eine sehr mangelhafte im Euklid, und es scheint sehr schwer zu seyn eine vollkommen genaue davon zu geben.

Denn wenn man sagt, daß der Winkel der Durchschnitt zweyer Linien sey, so braucht man einen Ausdruck, welcher nur die Idee vom Scheitel zurückruft; erklärt man den Winkel durch die Neigung dieser Linien, so macht man ein Pleonasmus; versteht man endlich unter dem Worte **Winkel** den zwischen zweyen sich schneidenden Linien liegenden Raum, wo soll dieser Raum aufhören? Ihn durch einen Kreisbogen zu schließen, wie d'Alembert vorschlägt, das wäre eine überflüße Idee einführen.

Ist es denn aber durchaus nothwendig den Winkel zu definiren? Genügt es nicht ihn zu zeigen und dann zu bemerken, daß zwey Winkel einander gleich sind, wenn, indem man sie auf einander legt, jeder ihrer Schenkel in zweyen Puncten zusammenfallen und dann immerweg zusammen bleiben, so weit man sie auch verlängern mag? Hieraus folgt offenbar, daß die Größe eines Winkels nicht von der Länge seiner Seiten abhängt. Wenn diese Bemerkungen wohl gefaßt sind, hat man einen vollständigen Begriff vom Winkel, und alle Folgerungen aus diesem Begriff sind dann leicht abzunehmen.

Einige Schriftsteller haben unnütze Kräfte verschwendet, um die Theorie der Parallelen nach allen ihren Theilen zu beweisen; andre haben sie mit einer wahrhaft unverzeihlichen Nachläßigkeit behandelt. Es scheint mir, daß es zwischen diesen beiden Extremen eine Mitte geben muß, welche allen Bedingungen, die man in den Anfangsgründen der Geometrie zu fordern berechtigt ist, ein Genüge thut. Dieses ist die Ordnung, die mir diesen Punct zu erreichen am zweckmäßigsten geschienen:

1) Die Parallelen als auf einer und derselben Geraden senkrechte Linien zu erklären, weil sie einander nie schneiden.

2) In Erinnerung zu bringen, daß wir durch

die

die Empfindung, welche uns die gerade Linie von jeder andern unterscheiden läßt, oder welche anzeigt, ob eine Richtung wohl gefaßt ist, überzeugt sind, daß alle Linien, welche nicht auf einer sie schneidenden senkrecht stehen, diejenigen schneiden müssen, welche es sind, weil wir durch die Empfindung selbst den Punct erhalten, worin dieser Durchschnitt geschieht.

3) Hieraus zu schließen, daß wenn eine senkrechte zweyen Graden gemein ist, alle auf eine derselben gefällte senkrechte auch zugleich auf der andern senkrecht seyn werden.

4) Mit Robert Simson zu beweisen, daß alle Linien, welche mit einer und derselben schneidenden gleiche correspondirende Winkel machen, auf einer und derselben Geraden senkrecht sind, und umgekehrt.

Nächst der Schwierigkeit, welche wir eben bey der Theorie der Parallelen bemerkt haben, stellt sich diejenige ein, welche von den incommensurablen Verhältnissen bey den Proportionallinien herrührt. Euklides weicht ihr aus, indem er den Fundamentalsatz dieser letztern Theorie aus der Vergleichung des Flächenraums der Dreyecke herleitet; allein es erfolgt daraus in dem Werke dieses Vaters der Wissenschaften eine Art Abgeschmacktheit, welche schon mehrern großen Geistern aufgefallen ist. Arnold hat sich in seiner Logik oder die Kunst zu denken nicht nur

mit Macht dagegen erklärt, sondern er hat auch in seinen im Jahre 1667 in Paris zum ersten Mahl gedruckten Neuen Anfangsgründen der Geometrie diesen Fehler zu verbessern gesucht. Dieses Werk ist meines Wissens das erste, worin man die Ordnung der Sätze der Geometrie der der Abstractionen angemessen abgefaßt hat, indem man zuvörderst die Eigenschaften der Linien, dann die der Flächen und endlich die der Körper betrachtet. Ob es gleich nicht von Fehlern befreyt ist, und daraus geschlossen werden kann, daß der Verfasser in der Geometrie nicht bewandert genug war, um deren Auseinandersetzungen zu vervollkommnen, so sind dennoch darin die Betrachtungen und der Ueberblick eines großen Geistes nicht zu verkennen, welcher beym ersten Blicke das Ganze eines Gegenstandes und den Zusammenhang seiner Theile übersieht. Die Meinung Arnolds scheint überdieß desto mehr Aufmerksamkeit zu verdienen, da sie Anlaß giebt zu glauben, daß sie auch die des Pascal ist.

Es wäre eine für die Geschichte der Wissenschaft interessante Arbeit successiv die Elementarbücher mit einander zu vergleichen, welche zu ihrer Zeit in merklicher Aufnahme waren, und daraus einigermaßen die Chronologie der Sätze zu ziehen. Man würde auf diese Art den Ursprung einiger Sätze wie-

der finden, welche zu einer gewissen Zeit in Vergessenheit gekommen und nachhero wieder als neue erschienen sind; man würde selbst zuweilen einen Rückgang bemerken, weil die Mode oder besondre Umstände in der Lage eines Schriftstellers seinem Werke bis auf einen gewissen Punct ein außerordentliches Lob geben oder es zur Vergessenheit verdammen können. Die Anfangsgründe der Geometrie würden in dieser Art reizende Bemerkungen darbiethen, und ich zweifle nicht, daß man alsdann die von Arnold hervorziehen würde, die heutiges Tages in Vergessenheit gekommen zu seyn scheinen. Man würde darin besonders die Idee antreffen, unmittelbar an den Linien zu beweisen, daß die Linien, welche durch die auf einem Schenkel eines Winkels in gleicher Entfernung genommnen Puncte parallel geführt werden, auch den andern Schenkel dieses Winkels in gleiche Theile theilen, welchen Satz diejenigen, welche der von ihm angenommenen Ordnung gefolgt sind, nachher zur Basis der Theorie der Proportionallinien machten. In der That hat der größte Theil derselben keine Genauigkeit in die Schlüsse gesetzt; wenn sie indessen einen solchen Gebrauch davon gemacht, so geschah es jedoch nicht darum, weil es nicht leichter war es besser zu machen; denn die Evidenz ist nicht dem von Euklides einge-

schlagenen Weg dergestalt eigen, daß man nicht sollte einen finden können, der ebenfalls genügend wäre, und dieß, indem man die von Euklides selbst gebrauchten Mittel benutzt.

Denn, wenn er den Fundamentalsatz der Theorie der Proportionallinien in aller Strenge beweist, so geschieht dieses nur, indem er sich auf das Verhältniß der Parallelogramme von gleicher Höhe stützt, bey denen ebenfalls die Incommensurabilität eintreten kann; und die Schlüsse, deren er sich diesen letztern Satz zu beweisen bedient, sind sehr geschickt die Wahrheit des andern Satzes direct darzuthun, in welcher Annahme es auch sey. Wenn nun diese Raisonnements an und für sich gut sind, warum soll man sie nicht in allen Umständen, worin sie anwendbar sind, brauchen? Man muß um so weniger Anstand nehmen sie bey den Proportionallinien anzuwenden, da sie zugleich strenge zu beweisen dienen, daß die Winkel den Bogen proportional sind, wie schon seit 1778 der Bürger Bertrand in einem schon citirten Werke gethan, welches unwiederlegbar beweist, daß man die Ordnung mit der Strenge vereinigen kann, welches man vorher für unmöglich zu halten geneigt war.

Alle diejenigen, welche in diese Gegenstände eingedrungen sind, wissen, daß die Schwierigkeit,

von der wir reden, nur von der Natur des Unendlichen herrührt, welches sich immer entweder deutlich oder verborgen, beym Uebergange vom Commensurablen zum Incommensurablen einstellt. Das einfachste Mittel der Betrachtung des Unendlichen auszuweichen ist die der Gränzen. Allein ohne zur Idee von Gränze seine Zuflucht zu nehmen benöthigt zu seyn, welche den Anfangsgründen in einiger Rücksicht fremd zu seyn scheint, biethen die Schriften des Euklides und Archimedes Betrachtungen dar, welche durchaus vom Unendlichen befreyet sind, und welche mit einer sehr großen Evidenz zugleich den Vortheil verbinden, die synthetische Methode in ihrer Reinheit darzustellen, welche den Anfangsgründen der Geometrie vorzugsweise vor allen andern gewidmet zu seyn scheint; und man muß überdies einräumen, daß nichts eleganter ist als die von ihnen in diesen Fällen gebrauchten Raisonnements, welche darin bestehen zu beweisen, daß die Größe, welche sie nicht erreichen können, weder kleiner noch größer als der Werth seyn kann, den sie ihr beylegen.

Durch eine ähnliche Schlußfolge giebt man den Beweisen in Beziehung auf die Ausmessung des Kreises und der runden Körper die der Geometrie wesentliche Strenge, weil die hier beym Uebergange von geraden zu krummen Linien eintretende Schwie-

rigkeit, so wie die vorhergehende im Uebergange vom Endlichen zum Unendlichen ihren Ursprung hat. Da aber die Gründe, nach welchen sie ausgeführt wird, allen Sätzen einerley Art gemein sind, so müssen sie bey Seite gesetzt werden, damit man dann das jedem Satze besonders eigne desto besser unterscheiden kann.

Hier ist ein Lehrsatz, dessen Anwendung mir leicht und sehr geschickt geschienen über die Schwierigsten Sätze einiges Licht zu verbreiten.

Es seyen die sechs Größen A, a, B, b, C, c so beschaffen, daß die Differenzen $B - A$, $C - B$, $b - a$, $c - b$ unaufhörlich abnehmen und immer positiv bleiben: so behaupte ich, daß wenn $A = a$, $C = c$ auch $B = b$ seyn muß *).

Denn es sey 1) $B = b + \delta$, so wird man haben

$$B - A = b + \delta - a = b - a + \delta, \quad C - B = c - b - \delta;$$

da aber $c - b$ unaufhörlich abnimmt, so kann sie kleiner als δ werden, und man würde alsdann nicht

*) Es ist leicht einzusehen, daß dieser Satz, von welchem ich in meinem Lehrbegriff der Differential- und Integralrechnung Gebrauch gemacht, im Grunde auf den des §. 185. dieser Anfangsgründe zurück kommt, nur daß dieser letztere ein wenig einfacher ist.

$C - B$ positiv oder $C > B$ haben, wie es der Vortrag des Satzes erfordert. Diese erste Annahme kann also nicht bestehen.

2) Es sey $B = b - \delta$, so kommt alsdann

$$B - A = b - \delta - a = b - a - \delta,$$

$$C - B = c - b + \delta;$$

in dieser Annahme würde man $B < A$ haben, welches nicht seyn kann. Es muß daher $B = b$ seyn.

Das Prinzip des Aufeinanderlegens, welches die Gleichheit zweyer ebnen Figuren zu beweisen dient, wird nicht genügend, wenn man die Körper mit allen ihren Dimensionen betrachtet. Es giebt welche, die auf einerley Theile construirt sind, die einerley Volumen haben, und die man wegen Verschiebung der Theile gleichwohl nicht in und auf einander legen kann; hieraus erfolgt eine fast an und für sich evidente Gleichheit, die man aber von der absoluten Gleichheit oder der Identität wohl zu unterscheiden hat. Die beyden Prisma, welche durch Zerlegung des Parallelepipedums erhalten werden, sind von dieser Art *). Die Entdeckung dieser Unvollkommenheit der Anfangsgründe der Geometrie

*) Die Gleichheit des Volumens zweyer Körper findet man auf eine sehr einfache Art in der Anmerkung zu §. 249. dieser Ausgabe unmittelbar bewiesen.

haben wir Robert Simson zu verdanken, und Legendre ist ihr in den Anmerkungen zur zweyten Ausgabe seiner Geometrie auf eine sehr elegante Art ausgewichen.

Es ist übrigens zu merken, daß sie in einem solchen Werke nicht anzutreffen seyn würde, worin man durch Zerlegung in Scheiben strenge bewiese, daß zwey Prisma von einerley Basis und einerley Höhe gleiches Volumen haben; da indessen diese Betrachtungen, wenigstens verborgen, mit dem Begriffe vom Unendlichen verbunden sind, so könnten sie als indirekt angesehen werden. Dieser Weg würde überdieß den Nachtheil haben, die Analogie, die zwischen der Theorie der Flächen und der der körperlichen Räume statt finden muß, bey Seite zu setzen, welche die Aehnlichkeit der Beweise, auf welchen die Gleichheit der Parallelogramme und die der Parallelepipeda von gleicher Basis und Höhe beruht, sehr in Evidenz setzt.

Die Beybehaltung der Analogie zwischen den Theilen eines und desselben Lehrbegriffs ist von großer Wichtigkeit, weil sie, indem sie dem Gedächtnisse zu Hülfe kommt, es zugleich gewöhnt, seine Ideen zu verallgemeinern. In der That hat man, seitdem die Stereotomie (oder die Theorie von den Durchschnitten der Ebnen und der Oberflächen der Körper) mit ei-

niger Ausdehnung vervollkommnet worden, bemerkt, daß der größte Theil der Eigenschaften der in einer und derselben Ebne gezeichneten Linien und Figuren, nur besondre Fälle von den im Raume betrachteten Linien, Flächen und Körper sind; und es ist daher unentbehrlich geworden, den Theil der Geometrie, worin man nur auf zwey Dimensionen des Raums Rücksicht nimmt mit dem, worin man alle drey Dimensionen beabsichtigt, so viel als möglich in einerley Ordnung und durch ähnliche Mittel abzuhandeln. Es würde zwischen der Ausmessung der Flächen und der der Volumen eine völlige Uebereinstimmung herrschen, wenn die drey Taetraedra, in welche das dreyseitige Prisma zerlegt werden kann, einander völlig gleich wären, so wie es die beyden das Parallelogram bildenden Dreyecke sind. Da man indessen bey diesem Umstande der Nothwendigkeit weichen muß, so muß man wenigstens streben die Aehnlichkeit im Fortgange der Sätze und in ihrem Vortrage beyzubehalten.

Wir verdanken dem Robert Simson noch andere Bemerkungen über die Bedingungen, wodurch man von der Aehnlichkeit der Körper überzeugt wird, und man kann die Ausgabe, welche er von den vorzüglichsten Büchern der Elemente des Eukli-

des geliefert, als in der Geschichte der Geometrie sehr wichtig ansehen *).

Um auch ein Wort über den Styl der Beweise zu sagen, will ich bloß bemerken, daß man sich so viel als möglich der Zurückführung aufs Absurde enthalten muß. Durch diese Art Raisonnements kann man zwar den Geist überzeugen, er wird aber dadurch nicht aufgeklärt, besonders wenn der Satz, worauf es ankommt, ein wenig verwickelt ist; denn wenn er sehr einfach ist, kann man ohne weitern Nachtheil die Zurückführung aufs Absurde brauchen. Es giebt selbst Fälle, wo es schwer scheint sich derselben zu enthalten; man muß aber alsdann jede Construction der Figuren vermeiden, oder, wenn eine durchaus nöthig ist, sie dergestalt ausführen, daß die Absurdität der Figur nicht zu sehr in die Augen fallend ist, weil diese Absurdität den Geist verhindert dem Fortgange des Raisonnements zu folgen, und dann die Imagination genöthig ist mit einer großen Anstren-

---

*) Dieses vortrefliche Buch ist im Jahre 1756 zum ersten Mahle in 4to Format erschienen. Der Verfasser hat seit der Zeit mehrere Ausgaben in 8. und im Englischen mit beträchtlichen Zusätzen geliefert.

Die Zusätze sind abgesondert ins Deutsche übersetzt vom Prediger Matthias.

gung die Figur dergestalt zu umformen, um darin das zu sehen, was man in Worten darstellen wollte. Ueberhaupt sind die besten Beweise die, welche, indem sie eine Wahrheit auf unwiderlegbaren Gründen stützen, dadurch den Zusammenhang derselben mit andern schon bekannten Wahrheiten fühlen lassen, und den Uebergang von einem Satze zum folgenden sinnlich machen.

Man könnte die vorhergehenden Betrachtungen auf die Autorität der Logik von Arnold stützen, worin man über die Bearbeitung der Anfangsgründe der Geometrie Betrachtungen findet, deren Richtigkeit nicht zu verkennen ist, wenigstens in der Rücksicht, in diesen Lehrbüchern die Nachahmung der Alten bis auf das Copiren der Fehler zu treiben.

Ich will noch hinzufügen, daß man nicht vernachläßigen muß in den geometrischen Beweisen ein Beyspiel von den verschiedenen Formen des Raisonnements zu geben, zu zeigen, wie die Regeln des Descartes und Pascal sich darin befolgt finden, und wie die Gewißheit der Geometrie aus der genauen Bestimmung der von ihr betrachteten Gegenstände erfolgt, und deren jeder, indem er nur von einer begränzten Anzahl Seiten betrachtet werden kann, zur vollständigen Aufzählung paßt, welche keinen Zweifel über das Resultat des Raisonnements übrig läßt.

Die auf diese Art abgefaßten Lehrbücher der Geometrie würden einigermaßen vortrefliche Anfangsgründe der Logik werden, und vielleicht die einzigen seyn, die man studiren muß. Wenn der Verstand nur sonst die gehörige Richtung hat, besitzt er die Fähigkeit einzusehen, ob ein einfacher Satz wahr ist oder nicht. Es ist viel nützlicher, diese Fähigkeit zu üben, als ihre Natur, so weit wir sehen können, zu untersuchen. Wer bey einem Wettrennen den Preis davon tragen will, wird gewiß eher daran denken seine Füße zu üben als den Mechanismus des Gehens zu ergründen. Die Regeln, sagt Condillac, sind wie die auf die Brücken gesetzten Brustlehnen, nicht um die Reisenden in den Gang zu bringen, sondern um sie vom Fallen abzuhalten. Wenn dieses ist, so wie es nicht bezweifelt werden kann, so müssen die Regeln sehr einfach und in geringer Anzahl seyn. Die des Pascal und Descartes scheinen mir für die geraden Geister hinreichend; was die übrigen betrift, so existirt für sie die Geometrie nicht.

Es bleibt hier noch übrig die Stelle auszumitteln, welche die Anfangsgründe der Geometrie in einem Cursus der Mathematik einnehmen müssen. Sollen sie vor oder nach der Algebra abgehandelt werden? Diese Frage läßt sich nicht absolut beant-

worten; man muß berücksichtigen, für was für Zöglinge das Buch bestimmt ist.

Die Geometrie ist vielleicht von allen Theilen der mathematischen Wissenschaften derjenige, den man zuerst lehren sollte. Er scheint mir sehr geschickt zu seyn, die Kinder zu interessiren, wenn man ihnen denselben nur mit besonderer Rücksicht auf dessen Anwendung, sowohl auf dem Papiere als auf dem Felde vorträgt. Es kann nicht fehlen, daß sie das Zeichnen und Messen angenehm beschäftige, und sie gleichsam an der Hand zu Vernunftschlüssen führe. Es ist hier der Ort nicht, diese Ideen zu entwickeln, welche zu Ende des zweyten Buchs von Emil auf einer eben so wahren als beredeten Art auseinandergesetzt sind. Die von Clairaut nach der Methode der Erfinder angeordneten Anfangsgründe der Geometrie sind unter diesen Umständen als ein Leitfaden für Lehrer am angemessensten; denn für den Zögling ist kein Buch nöthig, und es scheint mir sogar unmöglich für das erste Alter eins abzufassen, in welcher Wissenschaft es auch sey. Der Mangel an Strenge in den Beweisen und die geringe Ausdehnung dieses Werks haben es vermuthlich verhindert klassisch zu werden; allein diese Auslassungen, welche in Rücksicht der Zöglinge, deren Vernunft schon gebildet ist, einigen Nachtheil haben, sind es eben, was sie für

die Kindheit nützlich macht, welche so zu sagen die Wahrheit zu Anfange nur durch die Empfindung wahrnehmen, und welche von zu sehr methaphisischen Begriffen gleich zu Anfange ermüdet werden. Endlich setzt die Geometrie wenig oder fast gar keine Kenntnisse der Arithmetik voraus, und biethet überdieß Mittel dar, die Operationen dieser letztern Wissenschaft faßlich zu machen; dieses ist für diejenigen evident, die einiger Aufmerksamkeit fähig sind. Dieses sind auch vielleicht die Gründe, welche Karsten, den Verfasser der in Deutschland sehr bekannten Anfangsgründe bewogen haben, seine Werke mit der Geometrie anzufangen. Wenn aber bey einem solchen Lehrbuche die Anfangsgründe der Geometrie gleich zu Anfange gesetzt werden, so scheint es doch, daß man sie nach der Algebra setzen muß, wenn man sie für junge Leute bestimmt, welche schon im Alter hervorgerückt sind, deren Urtheilskraft man entwikkeln will, und welche man an eine strenge Form der Vernunftschlüsse gewöhnen will. Die unter diesem letztern Gesichtspuncte abgehandelte Geometrie ist unstreitig schwerer als die Algebra, aus welcher sie überdieß viel Nutzen ziehen kann; und ich glaube, daß man in keinem Falle berechtigt ist, die Geometrie zwischen die Arithmetik und Algebra zu setzen, weil diese beyden Theile nicht getrennt werden dürfen,

welche eigentlich zu reden, nur einen einzigen ausmachen, nehmlich die Wissenschaft von der Rechnung mit Größen, oder die allgemeine Arithmetik.

Zweyter Theil.

Von der Methode in der Mathematik.

Man ist einig, zwey Methoden anzuerkennen, die mathematischen Wissenschaften abzuhandeln: die Synthesis und die Analysis.

Geht man auf die griechische Etymologie dieser Benennungen zurück, so wird man finden, daß die eine Zusammensetzung, und die andere Auflösung oder Zerlegung bedeute. Nichts scheint beym ersten Anblick klarer zu seyn als diese Benennungen, und man bemerkt leicht, daß die Methoden, welche sie bezeichnen, einander entgegen gesetzt seyn müssen; es hat mir indessen geschienen, daß man überhaupt über den Unterschied der Verfahrungsarten der Synthesis von denen der Analysis nicht einverständig war, und daß man mit dem einen sowohl als mit den andern nicht immer die gehörigen Ideen verband. Ich habe daher geglaubt, um meine Be-

griffe über diesen wichtigen Punct zu berichtigen, in den Schriften der Alten Beyspiele von der Synthesis und Analysis suchen zu müssen; hieraus sind nun folgende Betrachtungen entstanden.

Die Elemente des Euklides, sind nach der synthetischen Methode abgehandelt. Nachdem dieser Verfasser Grundsätze festgesetzt und Fragen gebildet hat, führt er Sätze auf, die er nacheinander beweist, indem er sich auf dem Vorhergehenden stützt, indem er vom **Einfachen zum Zusammengesetzten** fortschreitet, welches der wesentliche Charakter der Synthesis ist.

Seit dem Ursprunge der Geometrie trift man auch Spuren der analytischen Methode an; denn man muß nicht glauben, daß die Algebra einzig und allein die Analysis ausmacht; man kann sich auch derselben bedienen, um die synthetischen Beweise zu erleichtern, weil diese im Grunde nur eine abgekürzte und reguläre Schrift ist, vermittelst welcher man die Beziehungen, welche die Größen zu einander haben können, darstellt; und ich will über diesen Gegenstand bemerken, daß Condillac, indem er in seiner Logik zeigt, daß die Algebra eine Sprache sey, nur das wiederholt, was Clairaut schon seit 1748 in seinen Anfangsgründen der Algebra gesagt und bewiesen hat.

Man

Man schreibt dem Plato den ersten Gebrauch der analytischen Methode bey den geometrischen Untersuchungen zu. Bey dieser Methode nimmt man an, daß die vorgelegte Aufgabe aufgelöst sey; hieraus folgt, daß eine gewisse Bedingung erfüllt ist, oder, welches auf eins hinaus kommt, daß zwischen verschiedenen Größen, von denen einige bekannt und andre zu finden sind, eine Gleichheit herrschen muß. Sucht man dann die Folgerungen aus der als erfüllt angenommenen Bedingung, oder aus der daraus erfolgenden Gleichheit, so gelangt man endlich dahin, die unbekannte Größe zu entdecken, oder das Verfahren aufzufinden, welches befolgt werden muß, um das verlangte zu vollziehen.

Ich glaube nicht besser thun zu können, als hier die Definitionen beyzubringen, welche Viete von der Synthesis und Analysis nach Theon, einem Alexandrinischen Geometer, gegeben, der gewiß besser als wir im Stande war, von der Methode der alten griechischen Geometer zu urtheilen.

Est veritatis inquirendae via quaedam in mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, a Theone nominata analysis, et ab eodem definata, adsumptio quaesiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Ut contra synthesis, adsumptio concessi per Conse-

quentia ad quaesiti finem et comprehensionem (Vietae opera, pag. 1.) *).

---

*) Man findet auch in der Vorrede zum VIIten Buch der mathematischen Sammlungen von Pappus, die entwickelte Definition der Analysis und Synthesis. Hier ist eine Uebersetzung von diesem sonderbaren Uebergange, der nicht ermangeln kann die Leser zu interessiren.

„Die Analysis ist der Weg, welcher, wenn man von der „verlangten Sache ausgeht, die für den Augenblick einge„räumt wird, durch eine Reihe von Folgerungen auf einige vor„her bekannte, oder unter die Anzahl der für wahr erkannten „Pricipien gesetzte Sachen führt. Diese Methode läßt uns „also von einer Wahrheit oder von einem Satze auf die ihm „vorhergehenden zurück gehen, und wir nennen sie Analysis „oder Resolution, so wie man im umgekehrten Sinne Solu„tion sagen würde. In der Synthesis hingegen gehen wir „von dem Satze aus, welcher sich in der Analysis zu Ende „befindet; ordnet man dann die Vordersätze, welche oben als „Folgerungen erschienen, ihrer Natur gemäß, und combinirt „sie mit einander, so gelangt man zum gesuchten Zwecke, von „welchem wir im ersten Falle ausgegangen sind."

„Man unterscheidet zwey Arten der Analysis, in der einen, „welche man die contemplative nennen könnte, hat man zur „Absicht, die Richtigkeit oder Unrichtigkeit eines vorgetrage„nen Satzes zu prüfen; die andere bezieht sich auf die Auflö„sung der Aufgaben, oder auf die Untersuchung der unbekann„ten Wahrheiten. In der ersten kommen wir, indem wir den „Gegenstand des vorgetragenen Satzes für wahr oder als schon „existirend annehmen, durch die Folgerungen aus der Annah„me auf einige bekannte Sachen; und wenn dieses Resultat „wahr ist, so ist auch der vorgetragene Satz wahr. Der di„recte Beweis wird alsdann gebildet, wenn man die verschie-

Der Beweis der Sätze in der Form, welche man Zurückführung aufs Absurde nennt, ist eigentlich zu reden, ein analytisches Verfahren; denn man nimmt darin an, daß der vorgetragene Satz wahr sey, und sucht daraus gewisse Folgerungen zu ziehen, welche, indem sie ungereimt sind, zu erkennen geben, daß die untersuchte Annahme es ebenfalls ist.

Ich glaube, daß nach dem Vorhergehenden die Kennzeichen der mathematischen Synthesis und Analysis hinlänglich evident sind. In der ersten Methode

---

„denen Theile der Analysis in einer umgekehrten Ordnung wie„der vornimmt. Wenn sich die Folgerungen, zu denen wir „zuletzt gelangt falsch finden, so können wir daraus schließen, „daß es auch der analysirte Satz ist. Was die Aufgabe be„trift, so nehmen wir sie zuvörderst als aufglöst an, und trei„ben die Folgerungen bis dahin, daß sie uns auf einige be„kannte Sachen führen. Wenn das letzte Resultat erhalten „werden kann, wenn es nehmlich in dem begriffen ist, was „die Geometer die gegebenen Stücke nennen, so ist die Auf„gabe aufgelöst. Der Beweis (oder besser die Construction) „wird auch noch gebildet, wenn man die Theile der Analysis „in einer umgekehrten Ordnung vornimmt. Die Unmöglich„keit des letzten Resultats der Analysis beweiset offenbar in „diesem Falle so wie im vorhergehenden, die der verlangten „Sache.“

„Es existirt überdieß in der Auflösung jeder Aufgabe das, „was man die Bestimmung nennt, das heißt, der Theil des „Raisonnements, durch welchen man zeigt, wann, wie und „auf wie vielerley Arten die Aufgabe aufgelöst werden kann.“

ist der vorgetragene Satz immer die letzte Folgerung in der Reihe von Raisonnements, welche den Beweis bilden. Sie ist eine Zusammensetzung; denn man fügt, so zu sagen, Gründe zu Gründen hinzu, bis man zu dieser Folgerung gelangt.

In der Analysis hingegen faßt man, indem die Aufgabe als aufgelöst angenommen wird, den vorgelegten Gegenstand in seinem ganzen Umfange, und nur dadurch, daß man ihn durch verschiedene Formen gehen läßt, oder daß man ihren Vortrag verschiedentlich umformt, gelangt man zur gesuchten Auflösung.

Condillac zeigt im vierten Bande seines Cursus des Studiums, daß jede Kunst zu denken nur in Aufsuchung der Identität verschiedener Sätze besteht; die Ordnung, in welcher die Sätze nach einander fortgehen, macht die Methode aus; wenn man also synthetisch raisonnirt, so sind alle Sätze, von denen man Gebrauch macht, identisch, bis auf den letzten, welcher selbst eine Folge der vorhergehenden, und welcher, indem er den vorgetragenen Gegenstand enthält, zeigt, daß der vorgetragene Satz wahr ist.

Wenn man analytisch raisonnirt, so geht man vom Vortrage aus, welcher an und für sich nicht identisch ist, und alle Uebersetzungen, durch welche man geht, sind nur hypothetisch; wenn man indessen zur

letzten gelangt ist, so muß es immer möglich seyn sie identisch zu machen; und hieraus erfolgt die Bestimmung der gesuchten Größe. Alsdann werden durch die Verknüpfung der vorher ausgedrückten Begriffe alle Zwischensätze identisch, und die vorgelegte Aufgabe ist also aufgelöst.

Diejenigen, welche mit der Algebra vertraut sind, werden ohne Mühe wahrnehmen, daß ich so eben den Weg des Calculs in der Auflösung der Gleichungen angegeben habe; sie werden bemerken, daß, weil man mit der letzten Operation zugleich den Werth der unbekannten hat, die Endgleichung identisch werden würde, wenn man diesen darin substituirte, und daß es sich eben so mit allen vorhergehenden verhalten muß.

Die Analysis ist überhaupt die Erfindungsmethode, und man glaubt jetzt, daß nur vermittelst ihrer die Geometer des letzten Jahrhunderts die zahlreichen Entdeckungen gemacht, wodurch sie berühmt geworden, und welche den Arbeiten ihrer Nachfolger zu Grundlagen gedient haben. Es sey indessen darum geschehen, um ihren Gang zu verbergen, oder vielleicht, weil sie, in dieser Methode nicht hinlänglich eingeweiht, es nicht wagten sich derselben gänzlich zu ergeben; genug, wenn sie zu einem Satze gelangt sind, bewiesen sie ihn immer synthetisch. Man

hat in den hinterlassenen Schriften des Pascal und Roberval gefunden, daß sie zur Auflösung der Aufgaben zuerst von der Methode der Untheilbarkeit Gebrauch gemacht, und alsdann die Wahrheit ihrer Resultate nach Art der Alten bewiesen; und am öftersten hielten sie den Weg, der sie darauf geführt hat, geheim, um sich gegen die Ausforderungen, die sich mit jedem Tage vermehrten, durch Waffen zu sichern, welche sehr geschickt sind sie über die Attaken, welche ihre Nebenbuhler ihnen machen könnten, triumphiren zu lassen *).

*) Dieser Bewegungsgrund war vielleicht nicht der des Newton, aber wenigstens glaubte er, daß ein mathematischer Satz nicht verdient an Tageslicht zu kommen, wenn er nicht auf eine synthetische Art bewiesen wird. Er erklärt sich hierüber in seiner Theorie der Fluctionen folgendermaßen:

„Postquam area curvae alicujus ita (analytice) reperta est et constructa, indaganda est demonstratio constructionis, ut omisso, quatenus fieri potest, calculo algebraico, theorema fiat concinnum et elegans, AC LUMEN PUBLICUM SUSTINERE VALEAT.“

Laplace meint auch, daß Newton „den größten Theil seiner Lehrsätze durch die Analysis gefunden habe, nur daß sein all zu großer Hang zur Synthesis und seine große Achtung für die Geometrie der Alten, ihn dieselben, so wie selbst seine Methode der Fluxionen in eine synthetische Form zu übersetzen bewogen“ (Man siehe Exposit. du Syst. du Monde, 2e Edit. pag. 338.).

Man findet auch in den lichtvollen Betrachtungen über

Mehrere Schriftsteller sehr verschiedener Art, wähnend, daß die Gewißheit, deren sich die Geometrie rühmen kann, einzig und allein von der Methode der Geometer herrührt, glaubten, daß wenn sie diese Methode auf Gegenstände ihrer Untersuchung anwendeten, sie dahin gelangen würden, solche für immer wieder Streitigkeiten geschützt zu haben. Man sieht aber leicht ein, daß diese Nachahmung der Methode nur unvollkommen werden konnte, und daß es immer eine Verschiedenheit geben mußte, welche von der Natur des Gegenstandes selbst herrührt.

In der Chemie scheint die Anwendung beyder Methoden evidenter, und der Etymologie der Benennungen, durch welche man sie bezeichnet, angemessener zu seyn. Man verbindet verschiedene einfache, oder wenigstens als einfach betrachtete Stoffe mit einander, und handelt also nach der Synthesis. Man nimmt einen gemischten Körper und sondert die Grundstoffe von einander ab: dieses ist die Analysis. Es verhält sich indessen mit den Dingen nicht in allen Fällen auf diese Art, denn nicht jede Analy-

---

den Charakter und die gegenseitigen Vorzüge der Synthesis und der Analysis, welche dieser letztern Citation folgen, die Präcision und die Klarheit, welche der Verfasser in den übrigen Theil seines vortrefliches Werks über die abstractesten Prinzipien der Mechanik getragen.

sis ist vollkommen; öfters nimmt man die gesuchte zusammensetzende nur dadurch wahr, daß man die von derselben erzeugten Eigenschaften mit denen vergleicht, welche schon vorher durch die Synthesis entdeckt worden, ohne sie abgesondert darstellen zu können. Auch gelingen die Zusammensetzuugen nicht immer vollständig, und es läßt sich mit Recht vermuthen, daß sie mit Auflösungen verbunden sind, welche ihre Gewißheit wankend machen; dieses scheint mir wenigstens aus den Einwürfen zu folgen, welche Dulduc gegen die neuere Theorie gemacht; und ohne sie einzuräumen, müssen sie meines Erachtens über die Folgerungen, die man aus Versuchen ziehen kann, sehr behutsam machen, sowohl weil man nicht auf eine gewisse Art die Natur der Effecte des Lichts und der Wärme, als der Electricität, und überhaupt der incoerciblen Substanzen erkennen kann.

Dieselben Gründe, welche veranlaßt haben, in allen Wissenschaften den synthetischen Weg einzuschlagen, wenn die Geometer nur durch Lehrsätze und Zusätze verfuhren, bewogen auch die Methaphysiker, in der Mitte dieses Jahrhunderts die analytische Methode diejenige zu nennen, deren sie sich zur Auseinandersetzung ihrer Entdeckungen bedienten. Die Mathematik war um diese Epoche mit der Be-

trachtung verknüpft, welche die Physik und Chemie seitdem erlangt haben. Die Geometer, welche dem Newton folgten, hatten Theorien vervollkommnet, welche er bloß berührt, Aufgaben aufgelöst, die er nicht erreichen konnte, und dieses durch die Anwendung der Analysis. Die Metaphysiker wollten einigermaßen ihre Arbeiten mit den der Geometer verbinden, und die Revolution, die sie im System der Ideen machten, mit derjenigen verbinden, welche Newton im Systeme der Welt machte; lasset uns aber untersuchen, ob der Gang ihrer Methode dem der mathematischen Analysis übereinstimmend ist, welche wir oben nach den Schriften der Alten beschrieben, die diese letztere erfunden und benannt haben.

Die Schriften des Condillac sollen mir von dieser letztern Methode Beyspiele darbiethen. In seinem Lehrbegriff der Empfindungen fängt er an seine Natur auf den einzigen Sinn des Geruchs zurück zu führen, indem er von allen übrigen abstrahirt, und alsdann die Natur der Ideen untersucht, die sie durch diesen Sinn erlangen kann. Geht man zum zweyten Kapitel dieses Werks über, so findet man im §. I. eine Definition, in §. II. nnd III. wahre Lehrsätze, das heißt Sätze, welche zuerst vorgetragen, und dann dadurch bewiesen sind, daß sie auf identische Begriffe oder auf Erklärungen der

Wörter zurück geführt sind. Liest man dieses Kapitel und das ganze Werk fort, so wird man finden, daß er auf eine analoge Art verfährt, wie in den Anfangsgründen der Geometrie verfahren wird; er geht vom Einfachen zum Zusammengesetztern über; die Empfindung, oder richtiger die Schnelligkeit, mit welcher sich die Fähigkeit die Ideen zu vergleichen und daraus das Resultat zu ziehen ausbildet, führt ihn auf Behauptungen, deren Wahrheit er endlich dadurch beweist, daß er alle Zwischensätze, die seine Urtheilskraft zweifelhaft ließ, entwickelt. Dieses ist es, was man in der Geometrie die Synthesis nennt. Dieser Synthesis, könnte man einwenden, ging eine Analysis vorher, weil der Verfasser das Empfindungssystem zergliedert hat, um nur zuvörderst das zu betrachten, was den Geruch betrift; allein es verhält sich eben so in der Geometrie, und das Gleiche mit dieser letztern Analysis findet sich in den verschiedenen Abstractionen, welche die Geometer zur Vereinfachung ihres Gegenstandes machen; so befreyen sie den Körper zuerst von zweyen seiner Dimensionen, um nur die Linien zu betrachten. Endlich wird man in den Verfahrungsarten des Condillac nicht jenen Weg der mathematischen Analysis finden, welcher darin besteht, die Aufgaben als aufgelöst anzunehmen, und welche wahrscheinlich auf die Ge-

genstände, die er abgehandelt hat, nicht anwendbar ist.

Untersucht man seine Logik unter eben dem Gesichtspuncte, so glaube ich, daß man so wie ich überzeugt werden wird, daß er darin einen synthetischen Weg befolgt. Zwar könnte dieser Weg als solcher von denjenigen verkannt werden, die nur die Schwierigkeit empfanden die Sätze zu verstehen, welche Newton zum Beyspiel auf eine synthetische Art bewiesen hat; allein dieses ist nur eine leicht zu vertilgende Meinung; der Weg des Newton würde eben so leicht als der des Condillac zu verfolgen seyn, wenn alle Wahrheiten, welche er auseinandergesetzt hat, sich eben so nahe berührten als die, welche man im Werke dieses letztern antrift; allein der Zwischenraum, der sie sowohl von einander als von den einen Theil der Anfangsgründe ausmachenden absondert, ist so groß, die Anzahl der zu vergleichenden und öfters selbst zu ergänzenden Zwischensätze, ist so beträchtlich, daß man, ehe man sie gründlich durchdringt, sich in eine lange Reihe von Folgerungen verliert.

Es ist dessen ungeachtet nicht zu bezweifeln, daß man durch Einführung aller Zwischensätze aus dem Werke Newtons ein eben so leicht verständliches Buch machen könnte als Euklides Elemente sind; mit einem

Worte, es würde sich hierbey eben das zutragen, was in den natürlichen Classificationen der Thiere oder der Pflanzen geschehen würde, wenn alle Arten bekannt wären. Man würde darin von einem Satze zum andern durch fast unwahrnehmliche Nuancen übergehen. Es ist indessen leicht einzusehen, daß selbst in Euklides Elementen eine große Anzahl von Uebergängen anzutreffen ist, in welchen noch viel dazu fehlt, daß alle Zwischensätze auseinander gesetzt seyn sollten. Sie sind selbst nicht von den Erfindern bekannt gemacht worden: und es würde sogar schwer seyn, sie wieder hervor zu bringen, ob gleich ihre Existenz eine an und für sich evidente Sache scheint.

Die Analysis bringt diese Zwischensätze wieder hervor, und legt sie demjenigen, welcher operirt vor Augen, nur in einer umgekehrten Ordnung; und wenn sie so zahlreich werden, daß es unmöglich seyn würde sie anders als durch algebraische Formeln auszudrücken, so muß man nothwendigerweise zum Calkul seine Zuflucht nehmen, und dieser zeigt also Wahrheiten, zu denen man durch ein bloßes Raisonnement nicht gelangen würde.

Es ereignet sich zuweilen, daß die Synthesis, indem sie leichtere Sachen als die Analysis vornimmt, auf eine einfachere Art zum Zwecke führt. Die Untersuchung über die Attraction der Sphäroiden von Mac-

laurin, haben ein schönes Exempel von diesem Falle dargebothen; allein unter den Händen des Lagrange, Laplace und des Legendre, hat der analytische Calcul in diesen Untersuchungen eben die Vortheile hervorgebracht, die er in allen andern Fällen darbiethet.

Nach dem Vorhergehenden scheint also, meines Erachtens, allen denen, welche von der von den Geometern angewandten Methode richtige Begriffe haben, hinlänglich bewiesen, daß bis jetzt die eigentliche Analysis nicht auf die Geometrie angewandt worden, welche auch dieser Anwendung, wenigstens beym jetzigen Zustand der Erkenntnisse nicht fähig zu seyn scheint.

Die Metaphysik hat also unter den Händen des Locke und Condillac nicht deshalb so beträchtliche Fortschritte gemacht, weil sie sich der analytischen Methode bedienten, sondern vielmehr, weil sie ihre erste Begriffe aus der Natur und nicht aus ihrer Imagination geschöpft haben, weil sie lieber zur eigentlichen Quelle der Erkenntnisse zurückgegangen sind, ehe sie sich neue nach ihrer Form geschaffen haben. Wenn sich die ersten Geometer von der geraden Linie und vom Kreise andere Begriffe als die, welche sie von der Natur erhalten haben, hätten machen können oder wollen, so ist kein Zweifel, daß sie eine Geometrie geschaffen haben würden, welche der der Natur in nichts ähnlich, oder welche gänzlich imaginär gewor-

den wäre. Die Methode der Geometer ist nicht allein die Ursache von der Gewißheit ihrer Resultate, diese Gewißheit rührt vorzüglich von der Natur der Begriffe selbst her, die sie zu combiniren hatten. Ein mathematischer Beweis kann Dunkel, verwickelt, und selbst unvollständig seyn, und dennoch denjenigen, welcher die nöthige Geduld und Fähigkeit besitzt, diesem Beweise zu folgen und ihn zu rectificiren, zur Erkenntniß der Wahrheit des vorgetragenen Satzes führen. Dieses rührt davon her, daß die Meßkünstler nur vollständige Begriffe anwendeten, oder solche, daß die als Hauptcharakter angeführte Eigenschaft zugleich alle andre mit in sich begreife. Wenn sie über die Begriffe einer andern Art raisonniren wollten, so haben sie sich öfters betrogen, ungeachtet aller Sorge, die sie getragen, die Strenge in der Form der Schlüsse beyzubehalten, eine Sache, von welcher ihnen niemand absprechen wird, daß sie darin bewandert waren.

Die Gewißheit eines Raisonnements besteht also weniger in der Methode als in der Einfachheit der ersten Begriffe und in ihrer Evidenz; und was jene allgemeine Prinzipia betrift, von denen Condillac immer mit der Verachtung spricht, die sie verdienen, so biethet die Geometrie nie dergleichen dar. Das von der kleinsten Wirkung, von welchem Maupertius so

viel Geräusch macht, wurde von den Geometern immer nur als ein aus dem allgemeinen Gesetze der Mechanik erfolgendes analytisches Resultat angesehen, und es ist nur durch den Calcul gehörig auseinander gesetzt; denn vorher hatte es unter den Händen der Methaphysiker mehrere sehr verschiedene Gestalten angenommen.

Der zweyte und driute Abschnitt der Gedanken des Pascal scheinen mir das zu enthalten, was es noch über die Art zu raisonniren lichtvolles giebt, und ich sehe nicht, daß man seitdem mehreres hinzugefügt habe. Schon Pascal hat den Mißbrauch der Definitionen gefunden, und sie auf ihren richtigen Werth zurück geführt, das heißt auf Beschreibungen und Beylegungen der Benennungen; allein weit entfernt irgend eine Art zu denken vorschreiben zu wollen, so wie in diesen leztern Zeiten geschehen, indem man das, was nur ein Mißbrauch des Raisonnements war, Synthesis nannte, ordnet er die verschiedenen Methoden, die Wissenschaften abzuhandeln, dergestalt, daß man die Hülfsmittel entdecken kann, die sich von jeder derselben erwarten lassen.

„Man kann, sagt er, im Studium der Wahrheit „drey Hauptgegenstände haben; der eine ist, sie zu entdecken, wenn man sie sucht; der andre sie zu beweisen, wenn man sie besitzt; sie von den Fehlern zu befreyen, wenn man sie untersucht.“

Diese drey Fälle können sich wirklich darstellen; der erste stellt sich fast immer ein; es ereignet sich indessen öfters, daß die Analogie einiger Umstände einen Satz muthmaßen läßt, und alsdann entdeckt man ihn nicht, sondern überzeugt sich von seiner Existenz durch einen Beweis in Form. Will man endlich einen Satz der Untersuchung unterwerfen, um dessen Wahrheit oder Falschheit aufzufinden, so könnte es nützlich seyn, die allgemeinen Mittel zu kennen, die diesen Zweck erfüllen.

Was die Auseinandersetzung der schon erlangten Begriffe oder der bekannten Wahrheiten betrift, so ist das einzige Gesetz, welches so viel als möglich zu beobachten ist, dieses, sie von den Seiten zu behandeln, wo sie die meisten Verhältnisse zu einander haben, und welche die wenigsten Bedingungen zu erfüllen darbiethen.

Benennt man, so wie es die Etymologie der Wörter mit sich führt, mit dem Nahmen Synthesis den Weg, wo man vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortgeht, und Analysis den Weg, wo man vom Zusammengesetzten aufs Einfache zurückkommt, so wird man leicht finden, daß diese beyden Methoden fast immer zusammen treffen; es giebt selbst keine andre vollständige Erkenntnisse als die, welche aus dem Zusammentreffen dieser beyden Methoden erfolgen;

gen; allein sie werden nach der Natur der Gegenstände, auf welche man sie anwendet, verschiedentlich verändert.

Die Synthesis der Analysis, so oft es sich thun läßt, zu nähern; die sorgfältigste Aufmerksamkeit in die Aufzählung der verschiedenen Seiten oder der verschiedenen Fälle zu setzen, welche der untersuchte Satz darbiethet, um sich zu überzeugen, ob alle in den Betrachtungen, auf welchen sie sich stützen, mitbegriffen sind, das heißt, ob die Verknüpfung der Ideen beobachtet ist: auf diese geringe Anzahl von Prinzipien muß sich meiner Meinung nach jede Kunst zu raisonniren einschränken *). Allein diese Kunst, welche so wie jede andre durch eine ununterbrochene und wohl angeordnete Uebung erlangt wird, biethet einen fehlerhaften Zirkel dar, welcher alle Subtilitäten der alten Schulen hervorgebracht hat, und welcher, so oft man die Theorie über einen gewissen Punct

---

*) Der Vte Abschnitt der von d'Alembert im IVten Bande seiner Mélanges de Littérature gegebenen Anfangsgründe der Philosophie, und das Supplement zu diesem Abschnitte, enthalten in wenigen Worten alles, was über den natürlichen Mechanismus des Raisonnements zu wissen nöthig ist. Was die verschiedenen Formen anbelangt, die man den Syllogismen geben kann, so findet man sie auf einer eben so kurzen als lichtvollen Art in Eulers Briefen an eine deutsche Prinzessin auseinander gesetzt.

hinaus treiben will, den menschlichen Geist von einem Irrthum in den andern verfallen zu lassen scheint; denn wenn die Fortschritte, welche man durch Anwendung des Raisonnements auf die Wissenschaften, welche auf unmittelbar durch die Sinne erhaltenen Ideen beruhen machen kann, von nichts begränzt werden, so würde es sich doch ganz anders verhalten, wenn man die Operationen des Verstandes an und für sich zergliedern wollte; es müßte sich in diesem Falle das zutragen, was in mathematischen Untersuchungen geschieht, wenn man aus Irrthum, oder sonst auf eine Art, eine Gleichung mit einer andern combinirt, welche von derselben nur scheinbar unterschieden, und welche, indem sie im Grunde völlig dieselbe ist, keine Aufschlüsse über die vorgelegte Aufgabe, und ein rein identisches Resultat giebt. Im Calcul kann dieses Resultat, welches uns unmittelbar in die Sinne fällt, und welches überdieß durch Zeichen ausgedrückt ist, deren Werth richtig bestimmt ist, nicht für das, was es ist, verkannt werden; richtet man hingegen seine Gedanken auf Gegenstände, die keiner solchen Präcision fähig sind, so kann man dergestalt getäuscht werden, daß man leichte Nuancen, welche die Intensität, die man der Aufmerksamkeit giebt, wenn man sie lange auf einen und denselben Gedanken richtet, in der Art zu empfinden und zu ur-

theilen hervorbringt, für wesentliche Modificationen hält. Man glaubt seinen flüchtigen Bemerkungen, so zu sagen, etwas körperliches zu geben, indem man, um sie zu bezeichnen, neue Wörter bildet, oder schon bekannte Wörter auf eine neue Art combinirt; man denkt dann über seine hypothetische Abstractionen nach, und da es ihnen an Gründlichkeit mangelt, so kommt endlich eine Zeit, wo die Absurdität der Folgerungen, die man daraus ziehen kann, über ihre Richtigkeit Aufschluß giebt. Man sucht alsdann einen neuen Weg, und sehr oft nimmt man einen schon längst vereitelten wieder hervor, in welchen man sich eben so verliert, als in dem, welchen man verlassen hat.

Es ist zu vermuthen, daß man den Ursprung unsrer Ideen zuerst in unsrem Empfindungsvermögen gesucht hat; allein sobald man anfing, die verschiedenen Umstände, welche die verlangten Begriffe darbothen, zu classificiren, einzutheilen, zu unterscheiden und zu abstrahiren, verwickelte man sich in den Categorien und in allen den Abstractionen, welche sie zur Folge hatten. Als die Vervollkommnung der Physik dem Raisonnement einen reellern Gegenstand gab, öfnete sie zugleich die Augen über den Mißbrauch, den man gemacht hatte. Der von Newton im dritten Buch seiner Principia vorgeschriebene Weg, konnte nicht auf den wenigen Gegenständen

eingeschränkt werden, auf welche er sie anwendete; der Glanz der Entdeckungen, die er machte, indem er ihm folgte, erregte in denen, welche die Wissenschaften trieben, eine Nacheiferung, welche bald eine Erneuerung der Methaphysik zur Folge hatte. Man muß zwar einräumen, daß sie in dieser Revolution viel gewonnen hat; allein es ist vielleicht Zeit, daß man stehen bleibe, und wenn man das, was sie einerseits verloren, mit dem vergleicht, was sie andrerseits gewonnen hat, wird man vielleicht einsehen, daß sie unter allen Wissenschaften besonders nur begränzter Fortschritte fähig ist, und daß in der Theorie der Operationen des Verstandes ein Punct existirt, den wir niemahls überschreiten können.

Lasset uns nun zu den physikalischen Wissenschaften wenden, welche uns durch zahlreiche und nützliche Entdeckungen alle Thätigkeit unsres Geistes verstatten; und endlich giebt die Theorie des Wahrscheinlichen, welche allen denen, die die moralischen und politischen Wissenschaften treiben, vertraut geworden, neue Grundpfeiler zu der unsrer Erkenntnisse, welche nicht fähig sind auf eine kleine Anzahl abstracter und vollständiger Begriffe zurück geführt werden zu können.

Inhalt.

Seite

Allgemeine Betrachtungen über die Ausdehnung. — 1
§. 1. Der Raum, welchen die Körper einnehmen, hat drey Dimensionen, Länge, Breite und Dicke oder Tiefe 1
Die Gränzen der Körper sind Flächen und haben nur zwey Dimensionen, Länge und Breite. — — — 1
Die Gränzen der Flächen oder ihr gegenseitiger Durchschnitt sind Linien, und haben nur eine Dimension, Länge. 1
Die Gränzen der Linien oder ihr gegenseitiger Durchschnitt, sind Puncte, welche gar keine Abmessung haben. — 2
§. 2. Die gerade Linie ist der kürzeste Weg, von einem Puncte zum andern zu kommen — — — 2
Eine gerade Linie ist durch zwey Puncte bestimmt, und kann über dieselben hinaus nur auf eine einzige Art verlängert werden — — — — — — 3
Eine Ebne ist eine solche Fläche, in welcher sich zwischen jede zwey beliebige Puncte derselben eine gerade Linie legen läßt, welche ganz in die Fläche fällt — — 3

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

Von den Eigenschaften de geraden und der Kreislinien. — — — — — — 4
Erklärungen und vorläufige Begriffe. — — — 4
§. 3. In den Anfangsgründen der Geometrie werden nur zwey Arten von Linien betrachtet, nehmlich die gerade

Seite

Linie und die Kreislinie, deren Puncte alle in einerley Ebne liegen, und von einem in derselben Ebne liegenden Puncte, welcher der Mittelpunct heißt, gleiche Entfernung haben. — — — — — Seite 4

Die Geraden, welche die Entfernung der Puncte des Umkreises von seinem Mittelpuncte messen, werden die Halbmesser des Kreises genannt. — — — — 4

Ein jeder Theil des Umkreises heißt ein Kreisbogen. 5

Unter Zirkel versteht man den Theil des durch die Kreislinie von allen Seiten begränzten Raums. — 5

Um alle Puncte zu finden, welche von einem gegebenen Puncte in gleicher Entfernung liegen, braucht man bloß aus diesem letztern mit einem der gegebenen Entfernung gleichen Halbmesser einen Umkreis des Zirkels zu beschreiben. — — — — — — — 5

§. 4. Die Entfernung zweyer Puncte oder die Länge einer geraden Linie messen, heißt nichts anders als untersuchen, wie viel Mahl diese Gerade eine andre als Einheit genommene in sich faßt. — — — — — 5

Ueberhaupt heißt eine Linie durch eine andre messen nichts anders, als das Verhältniß dieser beyden Linien aufsuchen, oder untersuchen, ob es nicht eine kleinere Linie giebt, die in jeder derselben eine Anzahl Mahl genau enthalten, und folglich das gemeinschaftliche Maaß beyder ist. — — — — — — — 5

§. 5. Wenn zwey gerade Linien gegeben sind, ihr gemeinschaftliches Maaß, oder wenigstens ihr annäherndes Verhältniß zu einander zu finden — — — 6

§. 6. Eine Gerade kann eine andere nur in einem einzigen Puncte schneiden — — — — — 7

§. 7. Der unbegränzte Raum, der zwischen zweyen sich schneidenden Geraden liegt, welche man sich so weit als

Seite

man will verlängert denken kann, wird ein Winkel genannt — — — — 7

Der Punct, worin sich die den Winkel bildenden Linien oder Schenkel schneiden, wird das Scheitel genannt 8

§. 8. Zwey Winkel sind einander gleich, wenn sie aufeinander gelegt, einander vollkommen denken — 8

Damit die Winkel gleich seyen ist keinesweges nöthig, daß die Schenkel des einen und des andern einerley Länge haben; es genügt schon, wenn sie sich in dem ihnen gemeinschaftlichen Theil decken — — 8

§. 9. Die gegenseitige Lage zweyer Geraden hängt von dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ab — 8

Eine Linie ist auf einer andern senkrecht, wenn sie mit dieser andern zwey gleiche Winkel bildet — „

Die senkrechte ist gegen keine Seite der Geraden, welche sie durchschneidet, geneigt — — „

Die Winkel, welche sie bilden, werden rechte Winkel genannt — — — — „

Jeder Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt ein spitzer Winkel — — — „

Jeder Winkel, welcher größer als ein rechter ist, heißt ein stumpfer Winkel — — — 9

Alle rechte Winkel sind einander gleich — 9

§. 10. Die Summe aller Winkel, welche von einerley Seite einer Geraden um einen ihrer Puncte, welcher als Scheitel betrachtet wird, gebildet werden können, ist immer zweyen rechten gleich, so groß auch die Anzahl dieser Winkel seyn mag — 10

§. 11. Wenn eine Linie gegen eine andre schief fällt, so bildet sie mit dieser andern zwey Winkel, welche zusammen zwey rechte ausmachen — — 10

Zwey einander schneidende Gerade bilden um ihren Durch-

Seite

schnittspunct vier Winkel, von denen je zwey und zwey am Scheitel entgegen gesetzt sind, und daher Scheitelwinkel heißen — — — 10

§. 12. Lehrsatz. Die Scheitelwinkel sind einander gleich 10

§. 13. Zusatz. Zwey auf einander senkrechte Linien bilden vier rechte Winkel — — 11

Die Summe aller Winkel, welche man um einen Punct herum bilden kann, beträgt immer vier rechte 11

§. 14. Von weniger als drey Seiten kann kein Raum eingeschlossen werden; dieser Raum wird ein Dreyeck genannt — — — 12

§. 15. Anmerkung. Die Summe zweyer Seiten eines Dreyecks ist immer größer als die dritte — 12

Wenn man von einem innerhalb eines Dreyecks genommenen Puncte nach zweyen Winkeln des Dreyecks gerade Linien zieht, so ist die Summe dieser beyden Geraden kleiner, als die der beyden sie umgebenden Seiten des Dreyecks — — — 12

In einem Dreyecke unterscheidet man sechs Stücke, nehmlich drey Seiten und drey Winkel — 13

Zwischen diesen sechs Stücken sind nothwendige Beziehungen anzutreffen — — — 13

§. 16. Lehrsatz. Wenn zwey Seiten eines Dreyecks zweyen Seiten eines andern stückweise gleich sind, und der von diesen Seiten in dem einen Dreyecke eingeschlossene Winkel, den von den gleichen Seiten im andern Dreyecke eingeschlossenen gleich ist, so sind diese Dreyeche auch in allen übrigen Theilen einander gleich — 13

§. 17. Zusatz Ein Dreyeck ist durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel völlig bestimme 14

§. 18. Lehrsatz. Wenn in zweyen Dreyecken eine Seite des einen einer Seite des andern, und die an dieser Seite im

Seite

erſten Dreyecke anliegenden Winkel den an der gleichen Seite im andern Dreyecke anliegenden Winkeln gleich ſind, ſo ſind dieſe Dreyecke vollkommen gleich 15

§. 19. Lehrſatz. Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten des einen zweyen Seiten des andern ſtückweiſe gleich, und die in beyden Dreyecken von den gleichen Seiten eingeſchloſſenen Winkel ungleich ſind, ſo iſt die dem größern dieſer beyden Winkel gegenüber ſtehende Seite größer als die dem andern Winkel gegenüber ſtehende 16

§. 20. Zuſatz. Wenn in zweyen Dreyecken alle drey Seiten ſtückweiſe gleich ſind, ſo ſind dieſe Dreyecke in allen Theilen gleich — — — 17

§. 21. Aufgabe. Wenn die drey Seiten eines Dreyecks abgeſondert gegeben ſind, dieſes dreyeck zu conſtruiren 17

§. 22. Anmerkung Damit man aus dreyen gegebenen Seiten ein Dreyeck conſtruiren könne, iſt erforderlich, daß die Summe jeder zwey dieſer Seiten größer als die dritte ſey — — — 18

§. 23. Aufgabe. An einen auf einer gegebenen Linie genommenen Punct einen Winkel anzulegen, welcher einem gegebenen Winkel gleich ſey — — 19

§. 24. Aufgabe. Wenn ein Dreyeck gegeben iſt, ein ihm gleiches zu conſtruiren, indem man zur Conſtruction nur zwey Seiten und den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel braucht — — — 20

§. 25. Aufgabe. Einem gegebenen Dreyecke ein ihm gleiches zu conſtruiren, indem man zur Conſtruction nur eine Seite und die beyden an derſelben anliegenden Winkel braucht — — — 20

Von den ſenkrechten und ſchiefen Linien. 21

§. 26. Lehrſatz. Die von einem beliebigen Puncte einer

Seite

senkrechten ausgehenden Linien, welche von ihrem Fußpunct gleiche Entfernung haben, sind einander gleich; und diejenigen, welche am weitesten davon entfernt sind, haben die größte Länge — — 21

§. 27. Erster Zusatz. Zwey gleiche schiefe Linien müssen nothwendigerweise von verschiedenen Seiten der senkrechten, aber in gleicher Entfernung vom Fußpuncte derselben fallen — — — 22

§. 28. Zweyter Zusatz. Die senkrechte Linie ist die kürzeste von allen, welche man von einem Puncte nach einer gegebenen Linie ziehen kann; wenn sie auf die Mitte dieser Geraden fällt, so haben alle ihre Puncte von den beyden äußersten Puncten gleiche Entfernung, und alle außerhalb der senkrechten genommene Puncte sind von diesen äußersten Puncten ungleich entfernt. Von einem Puncte kann man nach einer Geraden keine drey gleiche Linien ziehen — — — 22

§. 29. Aufgabe. Auf eine gegebene Linie eine sie halbirende senkrechte zu fällen — — 23

§. 30. Aufgabe. Von einem auf einer Geraden genommenen Punct eine auf derselben senkrechte zu errichten 24

§. 31. Aufgabe. Von einem außerhalb einer Geraden genommenen Punct auf diese Gerade eine senkrechte zu fällen — — — — 25

§. 32. Lehrsatz. Von einem außerhalb einer Geraden genommenen Puncte kann auf diese Gerade nur eine einzige senkrechte gefällt werden. Dasselbe gilt auch von allen auf dieser Geraden genommenen Puncten 25

§. 33. Erster Zusatz. Zwey auf einer und derselben dritten senkrechte Gerade können einander nie schneiden, so weit man sie auch oberhalb oder unterhalb dieser Geraden verlängern mag — — 26

Seite

§. 34. Zweyter Zusatz. Zwey Dreyecke, deren jedes einen rechten Winkel hat, sind einander gleich 1) wenn die respectiv dem rechten Winkel gegenüber stehenden Seiten, so wie einer ihrer übrigen Winkel einander gleich sind; 2) wenn außer den dem rechten Winkeln gegenüber stehenden Seiten, in jedem derselben noch eine gleiche Seite anzutreffen ist — — — 26

§. 35. Anmerkung. Der zweyte Fall der eben bewiesenen Gleichheit der rechtwinklichten Dreyecke kommt nicht allgemein allen andern zu — — 27

§. 36. Lehrsatz. Wenn zwey Seiten eines Dreyecks einander gleich sind, so sind die diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel ebenfalls einander gleich; und wenn sie ungleich sind, so steht die größere derselben dem größern Winkel gegenüber — — — 28

§. 37. Zusatz. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks einander gleich sind, so sind die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten ebenfalls einander gleich; die größere von zweyen Seiten ist die dem größern Winkel gegenüber stehende. Wenn endlich die drey Seiten eines Dreyecks gleich sind, so sind es auch die drey Winkel; und umgekehrt — — — 29

§. 38. Die Dreyecke, deren Seiten ungleich sind, heißen ungleichseitige; die, welche zwey gleiche Seiten haben, heißen gleichschenklichte: und diejenigen, deren drey Seiten einander gleich sind, heißen gleichseitige 29

Theorie der Parallelen — — 30

§. 39. Zwey in einerley Ebne liegende Gerade, welche einander nie schneiden, heißen parallele Linien — 30

Zwey auf einer und derselben Geraden senkrechte Linien, sind parallel — — — 30

Seite

§. 40. Anmerkung. Wenn eine Gerade auf einer andern senkrecht ist, und eine andre gegen eben diese Gerade schief fällt, so muß diese letztere hinlänglich verlängert die erstere schneiden — — — 30

Note, worin dieser Satz bewiesen wird — 31

§. 41. Zusatz. Zwey Gerade, welche respectiv auf zweyen andern sich schneidenden Geraden senkrecht sind, müssen einander nothwendigerweise schneiden — 32

§. 42. Lehrsatz. Wenn zwey Gerade auf einer dritten senkrecht sind, so müssen alle Linien, welche auf einer derselben senkrecht sind, es auch auf der andern seyn 32

§. 43. Zusatz. Zwey Gerade, welche einerley dritten parallel sind, müssen auch einander parallel seyn 33

§. 44. Lehrsatz. Wenn zwey parallele Gerade von einer dritten geschnitten werden, so ist der äußere Winkel dem ihm von derselben Seite gegenüberstehenden innern Winkel gleich — — — 33

§. 45. Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, und einer der äußern Winkel dem ihm von einerley Seite dieser letztern gegenüber stehenden innern gleich ist, so sind diese beyden Geraden parallel 34

§. 46. Anmerkungen. Jede Gerade, welche die Parallelen durchschneidet, heißt eine Secante. Die von einerley Seite der Secante liegenden Winkel, welche überdieß ihre Oeffnung nach einerley Seite gerichtet haben, heißen correspondirende Winkel. Alle Winkel, deren Oeffnungen zwischen den Parallelen liegen, werden innere Winkel genannt; und äußere Winkel heißen diejenigen, deren Oeffaungen außerhalb liegen. Die Winkel, welche sowohl gegen die Secante als gegen die Parallelen eine entgegengesetzte Lage haben, heißen Wechselwinkel — — — — 35

Seite

§. 47. Lehrsatz. Wenn zwey Parallele von einer Secante geschnitten werden, so sind

1) die correspondirenden Winkel einander gleich,

2) sind die innern Wechselwinkel,

3) sind die äußern Wechselwinkel gleich.

4) Beträgt die Summe der von einerley Seite der Secante liegenden innern Winkel, zwey rechte.

5) Betragen die äußern von einerley Seite liegenden Winkel zwey rechte.

6) Wenn eine dieser Eigenschaften bey zweyen von einer dritten geschnittenen Geraden eintritt, so müssen diese Geraden nothwendigerweise parallel seyn 36

§. 48. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct eine Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel sey — — — — 39

§. 49. Aufgabe. Durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punct, eine andre zu legen, welche mit der ersten einen Winkel einschließe, der einem gegebenen gleich ist — — — 39

§. 50. Lehrsatz. Die Winkel, deren Seiten parallel, und deren Oeffnungen nach einerley Seite gerichtet sind, sind einander gleich — — — 40

§. 51. Lehrsatz. Die drey Winkel eines Dreyecks betragen zusammen genommen zwey rechte — 40

NB. Der äußere Winkel eines Dreyecks ist an und für sich den beyden gegenüber stehenden innern gleich 41

§. 52. Zusatz. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks respectiv zweyen Winkeln eines andern gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern gleich — — — 41

Ein Dreyeck kann nicht mehr als einen rechten, und um so weniger mehr als einen stumpfen Winkel haben 41

Seite

§. 53. Ein rechtwinklichtes Dreyeck heißt dasjenige, welches einen rechten Winkel, ein spitzwinklichtes das, welches ein spitzen, und ein stumpfwinklichtes das, welches einen stumpfen Winkel hat. Im gleichseitigen Dreyecke, in welchem alle Winkel einander gleich sind, beträgt jeder Winkel zwey Drittheile von einem rechten 42

§. 54. Lehrsatz. Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich — — — 42

§. 55. Zusatz. Zwey Parallele sind allenthalben gleich weit von einander entfernt — — 43

§. 56. Lehrsatz. Wenn zwey Gerade von irgend einer Anzahl paralleler Geraden geschnitten werden, welche durch Puncte der ersten gehen, die auf derselben gleiche Entfernungen von einander haben, so werden auch die Theile der andern einander gleich seyn — 43

§. 57. Zusatz. Jede beliebige Anzahl Theile der ersten Geraden verhält sich zu einer gleichen Anzahl Theile der zweyten, wie sich die ganze erste Linie zur ganzen zweyten verhält — — — 44

§. 58. Lehrsatz. Drey Parallele schneiden jede zwey beliebige Gerade in proportionale Theile — 44

Anmerkung über das incommensurable Verhältniß 45

§. 59. Erster Zusatz. Wenn man in einem Dreyecke einer seiner Seiten eine Parallele führt, so werden die beyden andern Seiten durch diese Gerade proportional geschnitten 47

§. 60. Zweyter Zusatz. Umgekehrt, wenn eine Gerade zwey Seiten eines Dreyecks in proportionale Theile theilt, so ist sie der dritten parallel — — 48

§. 61. Dritter Zusatz. Die Gerade, welche irgend einen Winkel eines Dreyecks halbirt, theilt die gegenüber stehende Seite in zwey Theile, welche den anliegenden Seiten proportional sind — — 48

Seite

§. 62. Aufgabe. Zu dreyen gegebenen Linien eine vierte Proportionallinie zu finden — — 49

§. 63. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn die Winkel des einen den Winkeln des andern gleich, und die in dem einen und dem andern einen gleichen Winkel einschließenden Seiten, welche aus diesem Grunde homologe Seiten heißen, proportional sind. Eine dieser Bedingungen hat immer die andre zur Folge — 50

§. 64. Lehrsatz. Wenn in zweyen Dreyecken die Winkel des einen denen des andern stückweise gleich sind, so sind ihre homologe Seiten proportional, und die Dreyecke sind folglich ähnlich — — 50

§. 65. Zusatz. Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, 1) wenn nur zwey Winkel des einen zweyen Winkeln des andern stückweise gleich sind; 2) wenn ihre Seiten respectiv parallel sind; 3) Wenn ihre Seiten respectiv auf einander senkrecht stehen — — 51

§. 66. Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn sie einen gleichen Winkel haben, und die diesen Winkel in jedem Dreyecke einschließenden Seiten proportional sind — — — 53

§. 67. Lehrsatz. Wenn die Seiten zweyer Dreyecke respectiv proportional sind, so sind diese Dreyecke einander ähnlich — — — 54

§. 68. Aufgabe. Auf einer gegebenen Geraden ein Dreyeck zu construiren, welches einem gegebenen ähnlich sey 55

§. 69. Lehrsatz. Wenn zwey Parallele irgend eine Anzahl aus einem Puncte aus gezogener Linien durchschneiden, so werden sie von diesen Parallelen in proportionale Theile geschnitten, und sie schneiden diese letztere ebenfalls proportional — — — 56

Seite

§. 70. Aufgabe. Eine gegebene Gerade auf eben die Art einzutheilen als eine andre getheilt ist — 57

§. 71. Anmerkung. Andre Auflösung dieser Aufgabe 59

§. 72. Erster Zusatz. Eintheilung einer Geraden in gleiche Theile — — — — 60

§. 73. Zweyter Zusatz. Bildung des Maaßstabes 61

§. 74. Lehrsatz. Wenn man vom rechten Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks auf die gegenüber stehende Seite, welche die Hypothenuse heißt, eine senkrechte fällt, so wird 1) diese senkrechte das Dreyeck in zwey Theile zerlegen, welche einander und dem ganzen Dreyecke ähnlich sind; 2) zerlegt sie die Hypothenuse in zwey Theile oder Segmente von der Beschaffenheit, daß jede Cathete die mittlere Proportionale zwischen dem ihr anliegenden Segment und der Hypothenuse ist; 3) wird die senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beyden Segmenten der Hypothenuse seyn — 63

§. 75. Zusatz. die zweyte Potenz der Zahl, welche die Länge der Hypothenuse ausdrückt, ist gleich der Summe der zweyten Potenzen der Zahlen, welche die Längen der Catheten ausdrücken — — 64

§. 76. Lehrsatz. Wenn die drey Seiten irgend eines Dreyecks auf ein gemeinschaftliches Maaß zurückgeführt, und folglich in Zahlen ausgedrückt sind, so wird, wenn man vom äußersten Punct einer seiner Seiten auf eine der beyden andern eine senkrechte fällt, die zweyte Potenz der ersten gleich seyn der Summe der zweyten Potenzen der beyden andern, weniger zwey Mahl dem Product aus der Seite, auf welche die senkrechte fällt in die Entfernung der senkrechten von dem der ersten Seite gegenüber stehenden Winkel, wenn dieser Winkel spitz ist, und nebst zwey Mahl diesem Product, wenn dieser Winkel stumpf ist 65

§. 77.

Seite

§. 77. Zusatz. Ein Dreyeck ist spitzwinklicht, rechtwinklicht oder stumpfwinklicht, je nachdem die zweyte Potenz der größten seiner Seiten kleiner, gleich oder größer als die Summe der zweyten Potenzen der beyden andern Seiten ist — — — 68

Von den Vielecken — — — 69

§. 78. Die von mehreren mit einander verbundenen Geraden eingeschlossenen Ebnen, heißen Vielecke 69

Das einfachste von allen ist das Dreyeck, die übrigen werden, eben so nach der Anzahl ihrer Seiten, Vierecke, Fünfecke 2c. genannt — — 69

Die Winkel, deren Oeffnung außerhalb des Vielecks liegt, heißen auswärts gehende, und diejenigen, deren Oeffnungen innerhalb des Vielecks liegen, werden einwärts gehende genannt — — — 69

§. 79. Lehrsatz. Wenn man von irgend einem Winkel des Vielecks nach allen andern Linien zieht, welche Diagonale heißen, so wird dieses Vieleck in so viele Dreyecke zerlegt als es Seiten hat, weniger zwey — 69

§. 80. Zusatz. Die Summe aller Winkel irgend eines Vielecks beträgt so viel Mahl zwey rechte, als die Anzahl der Seiten ist, weniger zwey — 70

§. 81. Lehrsatz. Wenn man alle Seiten eines Vielecks, welches keine einwärtsgehende Winkel hat, nach einerley Richtung verlängert, so beträgt die Summe aller äußern Winkel vier rechte, so groß auch die Anzahl der Seiten des Vielecks seyn mag — — 71

§. 82. Anmerkung. Zwey Vielecke sind einander gleich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl gleicher und ähnlich liegender Dreyecke zusammen gesetzt sind — 71

§. 83. Lehrsatz. Wenn man alle Seiten eines Vielecks

Seite

außer eine, und auch alle Winkel desselben außer die an dieser Seite anliegenden kennt, so ist das Vieleck bestimmt und kann construirt werden — 71

§. 84. Anmerkung. Um ein Vieleck von der Anzahl N Seiten zu bestimmen, müssen 2N — 3 Stücke gegeben seyn, worunter die Winkel nur für N — 1 Stücke gerechnet werden dürfen — — 72

§. 85. Ein Polygon von vier Seiten, in welchem jede zwey gegenüberstehende parallel sind, heißt ein Parallelogramm 73

1) Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwey gleiche Dreyecke — — 73

2) Die gegenüberstehenden Seiten eines Parallelogramms sind respectiv einander gleich — 73

3) Wenn die gegenüberstehenden Seiten eines Vierecks gleich, oder auch, wenn zwey gegenüberstehende gleich und parallel sind, so ist es ein Parallelogramm 75

§. 86. Lehrsatz. Die beyden Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander — — 73

§. 87. Aehnliche Vielecke sind diejenigen, deren Winkel gleich und deren homologe Seiten proportional sind 74

§. 88. Lehrsatz. Wenn zwey Vielecke aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Dreyecke zusammen gesetzt sind, so sind die Winkel des einen denen des andern gleich, ihre homologe Seiten sind proportional, und sie sind folglich ähnlich — — 74

§. 89. Lehrsatz. Wenn zwey Vielecke ähnlich sind, so sind sie aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Dreyecke zusamengesetzt — — 75

§. 90. Aufgabe. Auf eine gegebene Linie ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen Vieleck ähnlich sey 76

§. 91. Anmerkung. Eine andere Art, die Vielecke in Dreyecke zu zerlegen — — 77

Seite

Anmerkung, über die Art eine Gegend aufzunehmen 78

§. 92. Lehrsatz. Wenn man in zweyen ähnlichen Vielecken zwey Gerade zieht, welche in beyden eine ähnliche Lage haben, so werden sie den homologen Seiten der Vielecke proportional seyn — — 78

§. 93. Lehrsatz. Die Umkreise zweyer ähnlichen Vielecke verhalten sich gegen einander wie die homologen Seiten dieser Vielecke — — — 79

Von der geraden Linie und dem Kreise 80

§. 94. Eine gerade Linie und ein Kreis können einander in nicht mehr als zweyen Puncten schneiden 80

Jede Gerade, welche den Umkreis eines Zirkels schneidet und außerhalb verlängert wird, heißt eine Secante 80

Der im Kreise liegende Theil dieser Geraden wird eine Sehne, Chorde genannt — — 80

§. 95. Die durch die beyden äußersten Puncte eines Bogens gehende Sehne, oder die, welche ihn unterstützt, wird die Sehne dieses Bogens genannt — 80

Eine und dieselbe Sehne gehört zu zweyen Bogen, welche zusammen den ganzen Umkreis des Zirkels ausmachen 80

§. 96. Wenn eine Sehne durch den Mittelpunct des Kreises geht, so giebt man ihr den Nahmen des Durchmessers — — — — 81

Alle Durchmesser des Kreises sind einander gleich 81

Der Durchmesser ist die größte aller Geraden, welche man im Umkreise eines Zirkels ziehen kann — 81

§. 97. Der Durchmesser theilt den Umkreis in zwey gleiche Theile — — — — 81

Zwey mit einerley Halbmesser beschriebene Kreise sind einander gleich — — — 81

§. 98. Lehrsatz. Wenn man einen Kreisbogen auf einen

Seite

andern mit demselben Halbmesser beschriebenen Kreisbogen dergestalt trägt, daß irgend zwey Puncte des einen Bogens auf den andern fallen, und daß ihre Convexitäten nach einerley Seite gekehrt sind, so wird der kleinere dieser Bogen seiner ganzen Ausdehnung nach auf dem größern liegen — — — 81

Anmerkung über diese Eigenschaft des Kreises, welche er mit der geraden Linie gemein hat, und welche die Aehnlichkeit aller seiner Theile und die Gleichförmigkeit der Krümmungen beweist — — 82

§. 99. Zusatz. In einem und demselben Kreise oder in zweyen mit gleichen Halbmessern beschriebenen Kreisen, sind die zu gleichen Sehnen gehörigen Bogen ebenfalls einander gleich, wenn sie von einerley Art, das heißt, entweder alle größer oder alle kleiner als der halbe Zirkelumkreis sind; und umgekehrt, wenn die Bogen gleich sind, müssen auch die Sehnen gleich seyn — 82

§. 100. Lehrsatz. In einem und demselben Kreise, oder in zweyen mit einerley Halbmesser beschriebenen Kreisen, hat der größere Bogen eine größere Sehne und umgekehrt, wofern die mit einander verglichenen Bogen kleiner als der halbe Umkreis des Zirkels sind 83

§. 101. Aufgabe. Wenn zwey Bogen eines und desselben Kreises oder zweyer gleichen Kreise gegeben sind, das Verhältniß ihrer Längen zu finden — 84

§. 102. Anmerkung. Die Gerade, welche mit dem Kreise nur einen Punct gemein hat, oder welche ihn nur berührt, wird eine Tangente genannt — 85

§. 103. Lehrsatz. Die aus irgend einem Puncte des Zirkelumkreises auf den durch diesen Punct gehenden Halbmesser senkrecht geführten Linie, ist eine Tangente des Kreises; und umgekehrt steht die durch irgend einen Punct

Seite

des Umkreises gehende Tangente, auf dem durch diesen Punct geführten Halbmesser senkrecht — 86

§. 104. Zusatz. Man kann durch einen gegebenen Punct eines Zirkelumkreises diesem Kreise eine Tangente führen, wenn man durch den Endpunct des durch diesen Punct gehenden Halbmessers eine senkrechte errichtet 87

§. 105. Lehrsatz. Jede aus der Mitte einer Sehne senkrecht geführte Gerade, geht durch die Mitte des auf dieser Sehne stehenden Bogens — — 87

§. 106. Erster Zusatz. Da die Mitte einer Sehne, der Mittelpunct des Kreises und die Mitte des auf der Sehne stehenden Bogens in einerley geraden Linie liegen, so muß jede durch zwey dieser Puncte gehende Gerade nothwendigerweise durch den dritten gehen 88

Jede aus dem Mittelpuncte, oder aus der Mitte eines Bogens auf die Sehne gefällte senkrechte, halbirt diese Gerade — — — — 88

§. 107. Zweyter Zusatz. Um einen Bogen in zwey gleiche Theile zu theilen, braucht man bloß aus der Mitte der diesem Bogen zugehörigen Sehne eine senkrechte zu errichten — — — 88

§. 108. Lehrsatz. Die in einerley Kreis zwischen zweyen parallelen Sehnen oder zwischen einer Tangente und einer ihr parallelen Sehne liegenden Bogen sind einander gleich — — — — 88

§. 109. Lehrsatz. Wenn man aus den Scheiteln zweyer Winkel mit einerley Halbmesser zwey Kreisbogen beschreibt, so ist das Verhältniß der zwischen den Schenkeln dieser Winkel liegenden Bogen dem der Winkel gleich — — — — 89

§. 110. Erster Zusatz. Da das Verhältniß der Bogen dem der Winkel gleich ist, so folgt, daß der aus dem Schei-

Seite

tel eines Winkels, als aus einem Mittelpuncte, zwischen seine Schenkel beschriebene Bogen, das Maaß dieses Winkels ist — — — 91

§. 111. Zweyter Zusatz. Die Geraden, welche einen Kreisbogen in mehrere gleiche Theile theilen, werden auch den von diesem Bogen gemessenen Winkel in eben so viele gleiche Theile theilen — — 93

§. 112. Lehrsatz Wenn ein Winkel seinen Scheitel im Umkreise eines Zirkels hat, so ist das Maaß dieses Winkels die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens — — — — 93

§. 113, Erster Zusatz. Der von einer Sehne und der Verlängerung einer andern gebildete Winkel, hat zum Maaße die Hälfte der Summe der auf diesen Sehnen stehenden Bogen (welche kleiner als der halbe Umkreis sind) 96

§. 114. Zweyter Zusatz. Alle Winkel, deren Scheitel im Umkreise liegen, und welche auf einerley Bogen stehen, sind einander gleich — — 96

2) Der Winkel, dessen Scheitel im Umkreise liegt, und dessen Schenkel durch die Endpuncte des Durchmessers gehen, ist ein rechter — — 96

§. 115. Lehrsatz. Der im Kreise zwischen dem Mittelpuncte und dem Umkreise liegende Winkel hat zum Maaße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens, nebst der Hälfte des zwischen ihren Verlängerungen enthaltenen Bogens — 97

§. 116. Lehrsatz. Der Winkel, dessen Scheitel außerhalb des Kreises liegt, hat zum Maaße die Hälfte der Differenz der zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen, von denen der eine seine Concavität und der andre seine Convexität dem Scheitel zuwendet — 97

§. 117. Aufgabe. Durch den Endpunct einer geraden

Seite

Linie eine senkrechte zu errichten, oder sie zu verlängern — — — — 98

§. 118. Aufgabe. Durch einen außerhalb des Kreises liegenden Punct, demselben eine Tangente zu führen 99

§. 119. Lehrsatz. Durch drey Puncte kann nur ein einziger Umkreis des Zirkels gelegt werden — 99

§. 120. Erster Zusatz. Um den Mittelpunct eines durch drey gegebene Puncte gehenden Kreises zu finden, muß man diese Puncte durch zwey Gerade verbinden, aus der Mitte jeder dieser Geraden eine senkrechte Linie errichten, und der Durchschnitt derselben wird den verlangten Mittelpunct geben — — 100

Die Aufgabe wird unauflösbar, wenn die drey Puncte in gerader Linie liegen — — 100

§. 121. Zweyter Zusatz. Zwey Kreise können keine drey Puncte gemein haben, ohne auf einander zu fallen 100

§. 122. Lehrsatz. Zwey Kreise, welche durch einen und denselben Punct der ihre beyde Mittelpuncte verbindenden Geraden gehen, haben nur diesen Punct gemein, in welchem sie einander folglich berühren; und umgekehrt, wenn zwey Kreise einander berühren, so liegen ihre Mittelpuncte und ihr Berührungspunct in einerley geraden Linie — — — 100

§. 123. Anmerkung. Bedingungen, welche bey der Berührung zweyer Kreise erfüllt werden müssen 103

Die aus dem Berührungspunct zweyer Kreise auf die die Mittelpuncte verbindende Gerade errichtete senkrechte, berührt zugleich beyde Kreise — — 103

Zwischen dem Kreise und der Berührungslinie kann keine gerade Linie gezogen werden; indessen läßt sich dazwischen eine unendliche Anzahl verschiedener Kreise legen 103

Anmerkung über den Berührungswinkel — 104

Seite

§. 124. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine der Lage nach gegebene Gerade in einem gegebenen Punct berührt, und überdieß durch einen gegebenen Punct gehe 104

§. 125. Aufgabe Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen andern Kreis in einem gegebenen Punct berühre, und welcher überdieß durch einen zweyten gegebenen Punct gehe — — — 105

§. 126. Aufgabe. Auf eine gegebene gerade Linie einen Kreisbogen von der Beschaffenheit zu setzen, daß alle Winkel, welche ihre Scheitel im Umkreise desselben haben, und auf dieser Linie stehen, einem gegebenen Winkel gleich seyen; oder einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebenen Winkel faßt — 106

§. 127. Lehrsatz Zwey von einem außerhalb eines Kreises liegenden Puncte durch den Kreis bis an den entferntesten Theil des Umkreises verlängerte Secanten verhalten sich umgekehrt wie die äußern Theile 106

§. 128. Anmerkung. Die Tangente ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Secante und ihrem außerhalb liegenden Theile — — 107

Beweis dieses Satzes à priori — — 108

§. 129. Lehrsatz. Zwey innerhalb eines Kreises sich schneidende Sehnen werden nach einem umgekehrten Verhältniß geschnitten — — — 108

Betrachtung. Ueber den gemeinschaftlichen Vortrag dieses Satzes und des Satzes im §. 127. — 109

Wenn zwey sich schneidende Gerade den Umkreis eines Zirkels zu gleicher Zeit, jede in zweyen Puncten treffen, so sind die Entfernungen ihres gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes von jedem ihrer Durchschnittspuncte mit dem Umkreise umgekehrt proportional — 109

§. 130. Zusatz. Die auf einem Durchmesser errichtete senk-

Seite

rechte, welche sich im Umkreise endigt, ist die mittlere Proportionale zwischen den beyden Segmenten des Durchmessers — — — 109

§. 131. Anmerkung. Beweis des vorhergehenden Satzes vermittelst des rechtwinklichten Dreyecks — 110

Die durch den äußersten Punct des Durchmessers gehende Sehne, ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und dem durch die vom andern äußersten Puncte der Sehne gefällte senkrechte gebildeten Segment 110

§. 132. Aufgabe. Eine gerade Linie nach dem mittlern und äußern Verhältniß, das heißt, dergestalt zu theilen, daß der größere Theil derselben die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem andern Theil sey — — — — 116

§. 133. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwey gegebene Puncte gehe, und eine der Lage nach gegebene unbegränzte Gerade berühre 118

Anmerkung über die verschiedenen Auflösungen, deren diese und die vorhergehende Aufgabe fähig sind 118

§. 134. Lehrsatz. In einem Halbkreise verhalten sich die zweyten Potenzen der vom Durchmesser ausgehenden Sehnen, wie die auf dem Durchmesser zwischen dem gemeinschaftlichen äußern Punct dieser Sehnen, und dem Endpuncte der von den andern äußersten Punct gefällten senkrechten liegenden Theile — 113

Von den im Kreise eigeschriebenen und den um denselben beschriebenen Polygonen — 114

§. 135. Anmerkung. Durch die Scheitel der Winkel eines jeden Dreyecks kann man einen Kreis führen. In diesem Falle ist das Dreyeck in dem Kreise eingeschrieben, und der Kreis ist um das Dreyeck beschrieben 114

Seite.

Andrer Beweis der Sätze der §§ 36, 37 und 51 114

§. 136. Aufgabe. In ein gegebenes Dreyeck einen Kreis einzuschreiben, das heißt, innerhalb des Dreyecks einen Kreis zu führen, welcher alle Seiten des Dreyecks berühre — — — — 115

§. 137. Anmerkung. Man kann nicht allgemein jedes Viereck oder jedes Vieleck von einer größern Anzahl Seiten in einen Kreis einschreiben — 116

Anmerkung über das Kennzeichen der im Kreise einzuschreibenden Vierecke — — 116

§. 138. Lehrsatz Jedes Vieleck von irgend einer Anzahl Seiten kann, wenn es regelmäßig ist, das heißt, wenn alle seine Seiten und Winkel einander gleich sind, in einen Kreis eingeschrieben und um denselben beschrieben werden — — — 116

§. 139. Die von den aus dem Mittelpuncte eines Vielecks nach den Winkeln desselben gezogenen Halbmesser entstandenen Winkel, werden Winkel am Mittelpuncte genannt, und da ihre Summe vier rechten gleich ist, so beträgt jeder derselben diese Summe dividirt durch die Anzahl der Seiten oder der Winkel des vorgelegten Vielecks — — — 118

§. 140. Lehrsatz. Regelmäßige Vielecke von einerley Anzahl Seiten sind einander ähnlich, und ihre Umkreise verhalten sich wie die Halbmesser der Kreise, in welche sie eingeschrieben, oder um welche sie beschrieben werden können — — — 118

§. 141. Aufgabe. Wenn ein Polygon von irgend einer Anzahl Seiten in irgend einem Kreise eingeschrieben ist, in denselben Kreis ein Polygon von doppelt so vielen Seiten als das erste einzuschreiben, und den Werth einer der Seiten des zweyten zu finden — 120

Seite

§. 142. Ein Viereck, worin alle Seiten und Winkel gleich sind, wird ein Quadrat genannt. Jeder seiner Winkel ist ein rechter — — — 121

§. 143. Anmerkung Das Quadrat ist ein Parallelogramm; ein jedes Parallelogramm, worin die Seiten gleich aber die Winlel ungleich sind, wird ein Rhombus genannt; wenn seine vier Winkel rechte, die Seiten aber ungleich sind, so wird es ein Rechteck genannt: jedes Rechteck kann in einen Kreis eingeschrieben werden 121

§. 144. Aufgabe. Auf eine gegebene gerade Linie ein Quadrat zu construiren — — 122

§. 145. Aufgabe. In einen Kreis die regelmäßigen Polygone von 4, 8, 16, 32, 64 ꝛc. Seiten einzuschreiben 123

Anmerkung über die Art $\sqrt{2}$ auf eine geometrische Art zu erhalten — — — 123

§. 146. Aufgabe. In einen Kreis die Vielecke von 3, 6, 12, 24, 48 ꝛc. Seiten einzuschreiben — 124

§. 147. Aufgabe. In einen Kreis die Polygone von 5, 10, 20, 40 ꝛc. Seiten einzuschreiben — 125

§. 148. Anmerkung. Die Differenz der auf der Seite des Sechsecks und der Seite des Zehnecks stehenden Bogen geben den funfzehnten Theil des Umkreises; die Sehne dieses Bogens ist die Seite des in diesem Kreise eingeschriebenen Funfzehnecks, und durch Halbirung desselben erhält man die Vielecke von 30, 60 ꝛc. Seiten 126

Anmerkung über die Eintheilung des Kreises in $2^n + 1$ Theile 127

§. 149. Aufgabe. Wenn ein reguläres Polygon von irgend einer Anzahl Seiten in einem Kreise eingeschrieben ist, um eben diesen Kreis ein reguläres Polygon von der nehmlichen Anzahl Seiten zu beschreiben; und umgekehrt, wenn das umschriebene Polygon gegeben ist, das eingeschriebene zu finden — — 127

Seite

§. 150. Zusatz. Ausdruck für die Seite des umschriebenen regulären Polygons durch die des correspondirenden eingeschriebenen — — — 130

§. 151. Anmerkung. Die Differenz zwischen den eingeschriebenen und dem correspondirenden umschriebenen Polygon wird desto kleiner, je mehr die Anzahl der Seiten zunimmt; und man kann immer zwey Polygone, ein eingeschriebenes und ein umschriebenes von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz ihrer Umkreise kleiner als jede gegebene Größe wird, so klein diese auch immer seyn mag — — — 130

§. 152. Zusatz. Der Umkreis des Zirkels ist kleiner als der Umfang des umschriebenen und größer als der des eingeschriebenen Polygons; man kann immer ein Polygon, entweder ein eingeschriebenes oder ein umschriebenes, von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz zwischen seinem Umfang und dem Umkreis des Zirkels kleiner als jede gegebene noch so kleine Größe werden kann 132

153. Lehrsatz. Wenn sich von zweyen unveränderlichen Größen A und B beweisen läßt, daß ihre Differenz B — A kleiner als eine dritte Größe δ ist, so klein diese letztere auch seyn mag, so sind diese beyden Größen einander gleich — — — 133

§. 154. Lehrsatz. Die Umkreise der Zirkel verhalten sich wie ihre Halbmesser oder wie ihre Durchmesser 134

Anmerkung. Andrer Beweis dieses Lehrsatzes 135

§. 155. Zusatz. Mittel, die Länge des Umkreises eines Zirkels zu berechnen, wenn der Halbmesser bekannt ist 136

§. 156. Aufgabe. Das annähernde Verhältniß des Umkreises eines Zirkels zu seinem Durchmesser zu finden 137

Anmerkung. Das in einem Werke der Braminen angegebene Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise 140

Seite

§. 157. Anmerkung. Abgekürzte Auflösung der vorhergehenden Aufgabe — — — 142

Vom Flächeninhalte der Vielecke und dem des Kreises 145

§. 158. Der Theil der Ausdehnung, welcher von den eine Figur begränzenden Linien eingeschlossen ist, wird der Flächenraum dieser Figur genannt — 145

Anmerkung über den Gebrauch der Wörter Fläche und Flächeninhalt — — — 145

§. 159. Zwey Figuren von sehr verschiedner Form, die aber gleiche Ausdehnung haben, oder gleichen Flächenraum fassen, werden gleich genannt — 146

§. 160. In den Dreyecken und Parallelogrammen wählt man eine der Seiten willkührlich zur Basis, und man nennt die Höhe, im Dreyecke die von dem dieser Seite gegenüber stehenden Winkel, und im Parallelogramm die von einem Puncte der gegenüber stehenden Seite auf diese Basis gefällte senkrechte — — 146

§. 161. Lehrsatz. Zwey Parallelogramme von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich 147

§. 162. Lehrsatz. Jedes Dreyeck ist die Hälfte eines Parallelogramms von einerley Grundfläche und Höhe 148

§. 163. Zusatz. Zwey Dreyecke von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich — 148

§. 164. Aufgabe. Ein Vieleck in ein andres zu verwandeln, welches eine Seite weniger als das erste und mit demselben einerley Flächeninhalt habe — 148

§. 165. Zusatz. Auf diese Art kann ein jedes Vieleck in ein ihm gleiches Dreyeck verwandelt werden 149

§. 166. Lehrsatz. Zwey Rechtecke von einerley Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien — 150

§. 167. Lehrsatz. Jede zwey Rechtecke verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien in ihre Höhen 150

Seite

Anmerkung über die Betrachtung der Producte aus den Flächen — — — 153

§. 168. Anmerkung. Ueber die Ausmessung der Flächen im Allgemeinen, und über den Sinn des Ausdrucks: der Flächeninhalt eines Rechtecks ist dem Producte aus der Grundlinie in die Höhe gleich — 153

§. 169. Erster Zusatz. Der Flächenraum eines Quadrats wird durch die zweyte Potenz einer Seite gemessen 155

§. 170. Zweyter Zusatz. Der Flächenraum eines Parallelogramms wird vom Producte aus seiner Grundlinie in die Höhe gemessen — — 155

Zwey Parallelogramme verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien in die Höhen — 156

§. 171. Dritter Zusatz. Der Flächenraum eines Dreyecks wird von der Hälfte des Products aus der Grundlinie in die Höhe gemessen — — 156

Die Dreyecke verhalten sich gegen einander wie die Producte aus ihren Grundlinien in die Höhen 156

§. 172. Aufgabe. Ein Parallelogramm oder ein Dreyeck in ein Quadrat zu verwandeln — 156

§. 173. Zusatz. Ein jedes Vieleck in ein ihm gleiches Quadrat zu verwandeln — — 157

§. 174. Anmerkung Der Flächeninhalt eines Vielecks wird bestimmt, wenn man die Summe der Flächenräume der zusammensetzenden Dreyecke nimmt — 157

§. 175. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Vierecks, in welchem zwey Seiten parallel sind, und welches man ein Trapezium nennt, wird durch das Product aus der halben Summe der parallelen Seiten in die zwischen diesen Seiten genommene Höhe bestimmt — 158

Der Flächenraum eines Trapeziums wird von dem Pro-

Seite

ducte aus seiner Höhe in eine in gleicher Entfernung von den parallelen Seiten geführte Linie gemessen 158

§. 176. Lehrsatz. Die Flächenräume ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate der homologen Seiten dieser Vielecke — — — 159

§. 177. Lehrsatz. Das auf der Hypoehenuse eines rechtwinklichten Dreyecks construirte Quadrat ist der Summe der auf beyden Catheten construirten Quadrate gleich 161

§. 178. Erster Zusatz Die auf den drey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks construirten Quadrate verhalten sich gegen einander wie die Hypothenuse und die an den Catheten anliegenden Segmente der Hypothenuse 162

§. 179. Zweyter Zusatz Jedes auf der Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks construirte Polygon, ist gleich der Summe der auf den beyden Catheten dieses Dreyecks construirten ihm ähnlichen Polygone — 162

§. 180. Aufgabe. Ein Vieleck zu construiren, welches einem gegebenen ähnlich sey, und dessen Flächenraum zu dem des andern ein gegebenes Verhältniß habe, oder einem gegebenen Quadrate gleich sey — 163

§. 181. Lehrsatz. Der Flächenraum eines regulären Vielecks hat zum Maaße die Hälfte des Products aus seinem Umfange in den Halbmesser des darin eingeschriebenen Kreises. Dieser Umfang wird der Perimeter genannt — — — 165

§. 182. Zusatz Die Flächenräume der regulären Polygone verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser der Kreise, in denen sie eingeschrieben, oder um welche sie beschrieben sind — — — 165

§. 183. Anmerkung. Es ist immer möglich zwey Polygone von einerley Anzahl Seiten, ein eingeschriebenes und ein umschriebenes von der Beschaffenheit zu finden,

Seite

daß die Differenz ihrer Flächenräume kleiner als eine gegebene Größe wird, so klein diese letztere auch seyn mag — — — — 166

Anmerkung. Andrer Beweis dieses Satzes — 167

§. 134. Zusatz. Man kann immer ein reguläres Polygon, entweder ein eingeschriebenes oder ein umschriebenes, angeben, dessen Flächenraum um so wenig als man will von dem eines gegebenen Kreises unterschieden ist — — — 167

§. 135. Lehrsatz. Wenn drey Größen A, B, X so beschaffen sind, daß die erste A, welche zwar veränderlich, aber nichts desto weniger immer größer als jede der beyden andern B, X ist, die unveränderlich sind, beyden zugleich so nahe als man will kommen kann, so muß man nothwendigerweise B = X haben — 168

§. 186. Lehrsatz. Der Flächenraum eines Kreises hat zum Maaße die Hälfte des Products aus dem Umkreise in den Halbmesser — — — 168

Anmerkung. Andrer Beweis eben dieses Satzes 169

§. Zusatz. Die Flächenräume der Kreise verhalten sich gegen einander wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser — — 170

Der Flächenraum eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Halbmessers multiplicirt durch das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser — — 170

§. 188. Lehrsatz. Der Flächenraum eines Kreisausschnitts hat zum Maaße das halbe Product aus dem Bogen in den Durchmesser — — — 170

§. 189. Anmerkung. Der Flächenraum eines Abschnitts wird erhalten, wenn man von dem des Ausschnitts den des dazu gehörigen Dreyecks abzieht — 171

Zweyter

Seite

Zweyter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den Ebnen und den von ebnen Flächen begränzten Körpern.

Von den ebnen und den geraden Linien — 172

§. 190. Eine gerade Linie, von welcher zwey Punkte in einer Ebne liegen, liegt gänzlich in dieser Ebne 172

§. 191. Der Durchschnitt zweyer Ebnen ist eine gerade Linie 172

§. 192. Um eine Ebne zu bestimmen sind drey Puncte erforderlich, oder zwey Ebnen, welche drey Puncte gemein haben, die nicht in einerley geraden Linie liegen, fallen gänzlich zusammen — — 173

§. 193. Zwey sich schneidende Linien liegen in einer Ebne 173

§. 194. Im Raume können zwey Gerade auf einer dritten senkrecht stehen, ohne deshalb parallel zu seyn 174

§. 195. Lehrsatz. Jede aus dem Durchschnitt zweyer Geraden außerhalb ihrer Ebne auf dieselbe senkrecht errichtete Gerade, ist auf allen denen senkrecht, welche man in dieser Ebne durch diesen Punct ziehen kann 175

§. 196. Anmerkung. Die nach dem vorhergehenden Lehrsatze geführte Gerade steht auf der Ebne, auf welche sie errichtet ist, senkrecht — — — 176

§. 197. Lehrsatz. Wenn drey Gerade in einem und demselben Puncte einer andern auf dieser letztern senkrecht stehen, so sind alle drey in einer und derselben auf dieser letztern senkrechten Ebne — — 175

§. 198. Lehrsatz. Von einem innerhalb oder außerhalb einer Ebne genommenen Puncte kann nur eine einzige senkrechte Linie auf dieser Ebne fallen, und durch einen und denselben Punct einer Geraden kann nur eine einzige auf dieser Geraden senkrechte Ebne gelegt werden 177

Seite

§. 199. Lehrsatz. Die schiefen Linien, welche von der auf einer Ebne senkrecht stehenden Geraden gleichen Abstand haben, sind einander gleich; die am meisten davon abweichenden sind die längsten, und die senkrechte ist die kürzeste von allen Geraden, welche man von einem gegebenen Puncte nach einer Ebne ziehen kann 178

§. 200. Anmerkung. Jeder Punct, der auf einer Ebne senkrecht stehenden Geraden, kann gebraucht werden in dieser Ebne Kreise zu beschreiben, deren Mittelpunct im Endpuncte dieser senkrechten liegt — — 178

Da die senkrechte Linie die kürzeste ist, welche man von einem außerhalb einer Ebne liegenden Punct nach dieser Ebne ziehen kann, so ist sie das natürlichste Maaß ihrer Entfernung — — — 179

§. 201. Lehrsatz. Wenn man von irgend einem Puncte einer gegen eine Ebne geneigten Linie auf diese Ebne senkrecht fällt, und die Endpuncte der schiefen und der senkrechten Linie durch eine Gerade verbindet, so wird die auf dieser letztern senkrechte Linie auch auf der geneigten senkrecht seyn — — — 179

§. 202. Lehrsatz. Jede außerhalb einer Ebne liegende Gerade, welcher einer in dieser Ebne gezogenen Linie parallel ist, trift sie nicht, so weit man sie auch verlängert annehmen mag, und sie ist einer jeden der erstern in dieser Ebne parallel geführten Geraden parallel 179

§. 203. Zusatz. Zwey Gerade, welche einer dritten parallel sind, müssen auch einander parallel seyn 181

§. 204. Wenn die Schenkel zweyer Winkel, deren Oeffnungen nach einerley Seite gekehrt sind, parallel laufen, so sind diese Winkel einander gleich, wenn sie auch in verschiedenen Ebnen liegen — — 181

§. 205. Lehrsatz. Wenn man aus irgend einem Puncte des

Seite

gemeinschaftlichen Durchschnitts zweyer Ebnen auf diesen Durchschnitt in jeder dieser Ebnen eine senkrechte errichtet, und der von diesen Linien eingeschlossene Winkel demjenigen gleich ist, welcher von zweyen andern auf eben die Art in zweyen andern Ebnen gezogenen Linien eingeschlossen wird, so ist die Neigung der beyden ersten Ebnen der der beyden letztern gleich — 181

§. 206. Anmerkung. Die Neigung zweyer Ebnen wird ein Flächenwinkel genannt — — 183

Der Flächenwinkel hat zum Maaße den von zweyen aus einem und demselben Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts dieser Ebnen in jeder derselben auf diesen gemeinschaftlichen Durchschnitt senkrecht geführten Geraden gebildeten ebnen Winkel — — 183

Die Flächenwinkel besitzen eben die Eigenschaften als die sie messenden ebnen Winkel — — 184

§. 207. Zusatz. Jede durch eine auf einer Ebne senkrecht stehende Gerade gelegte Ebne, ist auf dieser letztern senkrecht 184

Durch eine in einer Ebne gezogene Gerade kann nur eine einzige auf der erstern senkrechte Ebne gelegt werden 184

§. 208. Lehrsatz. Wenn man aus irgend einem Punete des gemeinschaftlichen Durchschnitts zweyer sich unter einem rechten Winkel schneidenden Ebnen, auf eine derselben eine Gerade senkrecht errichtet, so wird sie in der zweyten liegen — — — 185

§. 209. Zusatz. Der Durchschnitt zweyer auf einer dritten senkrechten Ebnen ist ebenfalls auf dieser letztern senkrecht 185

§. 210. Lehrsatz. Die in einer Ebne auf den Durchschnitt derselben mit einer sie senkrecht schneidenden Ebne, senkrecht geführte Gerade, steht auch auf dieser letztern Ebne senkrecht — — — — 186

§. 211. Lehrsatz. Zwey auf einer und derselben Ebne senk-

Seite

rechte Gerade sind einander parallel; und umgekehrt, wenn eine Gerade auf einer Ebne senkrecht steht, so ist jede Gerade, welche dieser parallel ist, ebenfalls auf derselben Ebne senkrecht — — — 186

§. 212. Lehrsatz. Zwey Ebnen, welche auf einer und derselben Geraden senkrecht stehen, können nie zusammentreffen 187

§. 213. Zwey auf einer und derselben Geraden senkrechte Ebnen sind, da sie nie zusammen treffen können, einander parallel 188

§. 214. Lehrsatz. Wenn zwey Ebnen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnitte einander parallel 188

§. 215. Zusatz. Zwey parallele Ebnen haben ihre senkrechte gemein — — — 188

Die Entfernung zweyer parallelen Ebnen ist überall dieselbe 188

§. 216. Lehrsatz. Wenn zwey sich schneidende Gerade zweyen andern sich schneidenden Geraden parallel sind, so ist die durch die beyden ersten bestimmte Ebne der durch die beyden andern bestimmten parallel — 189

§. 217. Zusatz. Durch zwey Gerade, welche, indem sie weder parallel sind, noch einander schneiden, nicht in einerley Ebne liegen können, kann man immer zwey parallele Ebnen legen, deren kürzeste Entfernung die der beyden vorgelegten Geraden giebt — — 189

§. 218. Anmerkung Die kürzeste Entfernung der Geraden des vorhergehenden §. befindet sich auf einer Geraden, welche auf beyden zugleich senkrecht ist — 190

§. 219. Lehrsatz Zwey zwischen zweyen parallelen Ebnen liegende Gerade werden von einer dritten den beyden ersten parallelen Ebne proportional geschnitten 190

§. 220. Wenn von mehreren durch einen und denselben Punct gehenden Ebnen je zwey und zwey einander schneiden, so wird der zwischen ihnen liegende Raum, welcher nach der ihrem Durchschnittspunct entgegen ge-

Seite

setzten Richtung unbegränzt ist, eine körperliche Ecke genannt — — — — 191

Die von dreyen Flächen umgebene Ecke heißt ein körperliches Dreyeck — — — 191

Der Durchschnittspunct aller Seiten einer körperlichen Ecke wird deren Scheitel genannt — — 192

Die gemeinschaftlichen Durchschnitte der Seiten sind die Gränzen — — — — 192

Im körperlichen Dreyeck sind sechs Stücke in Erwägung zu ziehen, nehmlich drey ebne und drey Flächenwinkel 192

§. 221. Lehrsatz. Die Summe jeder zwey ebnen Winkel eines körperlichen Dreyecks ist immer größer als der dritte 192

§. 222. Lehrsatz. Wenn zwey körperliche Dreyecke aus denselben ebnen Winkeln zusammengesetzt sind, so sind die zwischen gleichen ebnen Winkeln liegenden Flächenwinkel einander gleich — — 193

§. 223. Lehrsatz. Zwey körperliche Dreyecke, welche aus dreyen gleichen und ähnlich liegenden ebnen Winkeln zusammengesetzt sind, sind in allen ihren Theilen einander gleich — — — — 194

§. 224. Anmerkung. Zwey körperliche Dreyecke, welche zwar aus gleichen aber verschiedentlich geordneten ebnen Winkeln zusammengesetzt sind, oder zwey einander entgegengesetzte körperliche Dreyecke, können zwar nicht zusammen fallen, schließen aber doch einerley Raum ein 195

Anmerkung über die einander entgegenstehenden körperlichen Dreyecke — — — 196

§. 225. Lehrsatz. Die Summe aller ebnen Winkel, welche ein convexes körperliches Dreyeck zusammensetzen, das heißt eine solche, deren Gränzen alle auswärts gehen oder außerhalb liegen, ist immer kleiner als vier rechte, wie es auch übrigens beschaffen seyn mag — 197

Seite

Von den von Ebnen begränzten Körpern — 198

§. 226. Die von Ebnen begränzten Körper heißen Polyedra 198

Von weniger als vier Ebnen kann kein Raum von allen Seiten eingeschlossen werden, und der hieraus erfolgende Körper heißt ein Taetraedrum — — 198

Jeder Körper, der zu einer Seitenfläche irgend ein Vieleck, und zu den andern Seitenflächen lauter Dreyecke hat, die alle in einem und demselben Puncte zusammen laufen, wird eine Pyramide genannt; der Punct, woein sie sich vereinigen, ist das Scheltel, und die gegenüber stehende Fläche ist die Basis — — 198

§. 227. Körper, in denen zwey einander gegenüber stehende Seitenflächen gleich und parallel, und alle übrige Seitenfläche Parallelogramme sind, heißen Prisma 198

Die einander gegenüber stehenden Polygone sind die Grundflächen der Prisma — — — 198

Jede körperliche Ecke eines Prisma ist nur aus dreyen ebnen Winkeln zusammen gesetzt — — 199

§. 228. Lehrsatz. Wenn in zweyen Taetraedren ein Flächenwinkel aus gleichen und ähnlich liegenden Dreyecken zusammen gesetzt ist, so sind diese Taetraedra einander gleich; und sie werden es auch dann noch seyn, wenn zwey Seitenflächen des einen zweyen Seitenflächen des andern gleich, welche mit ihnen auf einerley Art zusammen gesetzt sind, und mit einander deuselben Flächenwinkel als diese einschließen — — 199

§. 229. Lehrsatz. Wenn in zweyen Prismen ein körperliches Dreyeck aus gleichen und ähnlich liegenden Polygonen zusammen gesetzt ist, so sind diese Prisma einander gleich 200

§. 230. Anmerkung. Man kann immer mit den Scheiteln der körperlichen Ecken eines jeden Polyedrums dreyeckige Pyramiden bilden, wenn man durch einen dieser Puncte

Seite

Ebnen legt, welche entweder durch die Gränzen des vorgelegten Polyndrums, oder durch die in seinen Seitenflächen gezogenen Diagonallinien gehen — 201

Zwey aus einerley Anzahl gleicher und ähnlich liegender Pyramiden zusammen gesetzte Körper sind einander gleich 201

§. 231. Die Prismen, deren Grundfläche ein Parallelogramm ist, werden Parallelepipeda genannt; ihre gegenüber stehende Seitenflächen sind gleich und parallel 201

§. 232. Lehrsatz. Jeder zwischen sechs parallelen Ebnen, von denen je zwey und zwey parallel sind, eingeschlossene Körper ist ein Parallelepipedum — 202

§. 233. Aehnliche Körper sind diejenigen, deren Seitenflächen in gleicher Anzahl ähnlich, ähnlich geordnet, und gegen einander gleich geneigt sind — 203

§. 234. Lehrsatz. Wenn die Dreyecke, welche zwey triedrische Winkel bilden, homolog den tetraedrischen, einander ähnlich und ähnlich geordnet sind, so sind diese Tetraedra einander ähnlich; und sie sind es auch dann, wenn zwey Seitenflächen des einen mit einander derselben Winkel einschließen als zwey Seitenflächen des andern, wenn diese ferner jenen ähnlich und aus homologen Seiten zusammengesetzt sind — — — 203

§. 235. Lehrsatz. Zwey Pyramiden sind einander ähnlich, wenn ihre Seitenflächen ähnlich und ähnlich geordnet sind 205

§. 236. Erster Zusatz. Wenn man eine Pyramide durch eine ihrer Basis parallele Ebne schneidet, so wird davon eine ihr ähnliche Pyramide abgeschnitten — 205

§. 237. Zweyter Zusatz. Die homologen Gränzen ähnlicher Pyramiden sind einander, und den von ihren Scheiteln auf die Grundflächen gefällten senkrechten proportional 207

§. 238. Anmerkung. Nach dem Vorhergehenden kann man die Höhe einer Pyramide finden, wenn man die Di-

Seite

mensionen eines der Basis parallel gemachten Abschnitts kennt — — — — 207

§. 239. Lehrsatz. Die Grundflächen zweyer ähnlichen Pyramiden verhalten sich gegen einander wie die Quadrate irgend zweyer homologen Gränzen, oder wie die Quadrate der von den Scheiteln auf ihre Ebne gefällten Höhen 208

§. 240. Zusatz. Die in irgend zweyen Pyramiden in gleichem Abstande von den Scheiteln gemachten Schnitte, haben ein beständiges Verhältniß zu einander, wie auch übrigens diese Entfernungen und die Figuren der Grundflächen beschaffen seyn mögen — — 209

§. 241. Lehrsatz. Zwey Polyedra, welche aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich geordneter Pyramiden zusammengesetzt sind, sind einander ähnlich — 210

§. 242. Lehrsatz. Wenn zwey Polyedra ähnlich sind, so können sie in eine gleiche Anzahl ähnlicher und ähnlich geordneter Taetraedra zerlegt werden — 212

§. 243. Lehrsatz. Die homologen Gränzen ähnlicher Körper sind, so wie die Diagonalen der homologen Seitenflächen und die Diagonalen innerhelb der Körper, proportional — — — — 214

§. 244. Anmerkung. Ueber die Ausmessung des Flächenraums der Körper — — — 215

§. 245. Lehrsatz. Die Flächen ähnlicher Körper verhalten sich wie die Quadrate der homologen Gränzen 216

Von der Ausmessung der körperlichen Räume 216

§. 246. Der von der Oberfläche eines Körpers eingeschlossene oder von diesem Körper eingenommene Raum wird allgemein mit dem Nahmen des Volumens bezeichnet 216

§. 247. Lehrsatz. Zwey auf einerley Grundfläche stehende Parallelepipeda, welche oberhalb von einerley ihrer Ba-

Seite

ſis parallelen Ebne begränzt werden, ſind am Volumen einander gleich — — — 217

§. 248. Zuſatz. Ein Parallepipedum von irgend einer Form und ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, welche auf gleichen Grundflächen ſtehen, und ſich in einerley ihrer Baſis parallelen Ebne endigen, oder welche einerley Höhe haben, ſind einander gleich — — — 218

§. 249. Lehrſatz. Wenn man auf die Baſis eines dreyeckigten Prisma ein Parallelogramm bildet, nnd auf dieſes Parallelogramm als Baſis genommen ein Parallelepipedum ſetzt, welches mit dem dreyeckigten Prisma einerley Höhe hat, ſo iſt dieſes die Hälfte von jenem 219

Anmerkung, worin die Gleichheit der Volumen der beyden dreyeckigten Prisma des vorhergehenden §. bewieſen wird, welche, obgleich auf einerley Ebne conſtruirt, dennoch nicht zuſammen fallen können — 220

§. 250. Zuſatz. Zwey dreyeckigte Prismata von einerley Grundfläche und Höhs ſind einander gleich — 221

§. 251. Lehrſatz. Wenn man eine dreyeckigte Pyramide durch gleich weit von einander entfernte und ihrer Baſis parallele Ebnen ſchneidet, ſo kann man bey jedem hierdurch entſtehenden Abſchnitt ein äußeres und ein inneres Prisma von der Beſchaffenheit bilden, daß die Summe der äußern um ſo wenig als man will von der innern, und folglich von der Pyramide unterſchieden iſt 221

§. 252. Lehrſatz. Zwey dreyeckigte Pyramiden von einerley Baſis und Höhe ſind einander gleich — 223

Anmerkung Andrer Beweis des vorhergehenden Satzes 224

§. 253. Lehrſatz. Jede dreyeckigte Pyramide iſt der dritte Theil eines dreyeckigten Prisma, welches mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat — — 224

§. 254. Lehrſatz. Rechtwinklichte Parallelepipeda von einerley Grundfläche verhalten ſich wie ihre Höhen 225

Seite

§. 255. Lehrsatz. Zwey rechtwinklichte Parallelepipeda verhalten sich wie die Producte aus den an einerley körperlichen Dreyecke anliegenden Gränzen — 227

§. 256. Anmerkung. Das Maaß des Volumens eines rechtwinklichten Parallelepipedums ist das Product aus dreyen an einander stoßenden Seiten, indem man zur Vergleichung ein Rechteck nimmt, dessen drey an einander liegende Seiten der als Einheit genommenen Linie gleich sind 228

§. 257. Erster Zusatz. Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen drey Gränzen gleich sind, und welches dann den Nahmen des Cubus erhält, hat zum Maaße die dritte Potenz seiner Gränze — — 229

§. 258. Zweyter Zusatz. Das Volumen eines jeden Parallelepipedums hat zum Maaße das Product aus der Basis in die Höhe — — — 229

§. 259. Dritter Zusatz. Das Volumen eines jeden Prisma ist dem Producte aus der Basis in die Höhe gleich 230

§. 260. Vierter Zusatz. Das Volumen einer dreyeckigten Pyramide hat zum Maaße den dritten Theil des Products aus ihrer Basis in die Höhe — 231

§. 261. Fünfter Zusatz. Das Volumen einer jeden Pyramide hat zum Maaß den dritten Theil aus der Basis in die Höhe — — — 231

Jede zwey Pyramiden verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen in die Höhen — — 232

Das Volumen einer abgekürzten Pyramide wird erhalten, wenn man von dem der ganzen Pyramide das der abgeschnittenen abzieht — — — 232

§. 262. Anmerkung. Das Volumen eines jeden Polyedrums wird erhalten, wenn man dieses in dreyeckigten Pyramiden zerlegt, oder es auf abgekürzte dreyeckigte Prisma zurückführt — — — 232

Seite

§. 263. Lehrsatz. Ein abgekürztes dreyeckigtes Prisma ist dreyen dreyeckigten Pyramiden gleich, welche mit demselben einerley Basis haben, und welche ihre Scheitel respectiv in den Winkeln des dieser Basis gegenüber stehenden Dreyecks haben — — 233

§. 264. Zusatz. Das Volumen eines abgekürzten dreyeckigten Prisma hat zum Maaße das Product aus seiner Basis in den dritten Theil der Summe der drey von jedem der Winkel der obern Fläche auf diese Basis gefällten senkrechten — — — 234

§. 265. Lehrsatz. Aehnliche Körper verhalten sich wie die Cubi ihrer homologen Gränzen — — 235

Zweyter Abschnitt.

Von den runden Körpern — — 237

§. 266. Die runden Körper sind diejenigen, welche durch die Bewegung einer ebnen Figur um eine gerade Linie entstehen — — — — 237

In den Anfangsgründen der Geometrie betrachtet man nur den geraden Kegel, den geraden Cylinder und die Kugel 237

Der gerade Kegel wird erzeugt, wenn sich ein rechtwinklichtes Dreyeck um eine seiner Catheten bewegt; die Hypothenuse beschreibt alsdann die gerade Kugelfläche 237

Die Seite, um welche sich das erzeugende Dreyeck dreht, heißt die Axe — — — 238

Die Basis des Kegels ist ein Kreis — — 238

Jeder durch eine dieser Basis parallele Ebne gemachten Schnitt ist ebenfalls ein Kreis — — 238

Die Umkreise dieser Zirkel sind ihren Entfernungen vom Scheitel proportional — — 238

Ihre Flächenräume verhalten sich wie die Quadrate dieser Entfernungen — — — 238

Seite.

Anmerkung über den schiefen Kegel — 238

§. 267. Anmerkung. Wenn man die Dimensionen eines durch eine des Basis parallele Ebne abgekürzten Kegels kennt, so kann man nach dem Vorhergehenden die Höhe des ganzen Kegels finden — — 239

§. 268. Lehrsatz. Man kann immer zwey reguläre Pyramiden, eine in dem geraden Kegel eingeschriebene, und eine um denselben beschriebene von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz ihrer Flächen kleiner als jede gegebene Größe wird, so klein diese letztere auch immer seyn mag — — — — 239

Die Oberfläche einer regulären Pyramide mit Ausschluß ihrer Basis hat zum Maaße die Hälfte des Products aus dem Umfange dieser Basis in die vom Scheitel derselben auf eine der Seiten dieses Umfangs gefällte senkrechte 240

§. 269. Lehrsatz. Die Oberfläche eines Kegels ist immer kleiner als die der umschriebenen und größer als die der eingeschriebenen Pyramide; jedoch kann jede dieser letztern sich der erstern um so viel als man will nähern 241

§. 270. Lehrsatz. Die Oberfläche eines geraden Kegels hat zum Maaße die Hälfte des Products aus dem Umkreise des als Basis dienenden Kreises durch dessen Seite 242

Anmerkung, worin ein anderer Beweis des obigen Satzes und der ihm analogen Sätze gegeben wird — 243

§. 271. Lehrsatz. Die Oberfläche eines durch eine der Basis parallele Ebne abgekürzten Kegels hat zum Maaße die Hälfte des Products aus der Summe beyder Umkreise der Grundflächen in dessen Seite, oder das Product aus dieser Seite in den Umkreis des in gleicher Entfernung von beyden Grundflächen gemachten Schnitts — 243

§. 272. Lehrsatz. Man kann immer zwey Pyramiden, eine in dem Kegel eingeschriebene und eine umschriebene von

Seite

der Beschaffenheit finden, daß die Differenz ihrer Volumen kleiner als jede gegebene noch so kleine Größe wird 245

§. 273. Zusatz. Man kann immer eine eingeschriebene oder eine umschriebeue Pyramide von der Beschaffenheit finden, daß sie um so wenig als man will vom Kegel unterschieden ist, indem die erste kleiner und die andere größer alss derselbe ist — — 246

§. 274. Lehrsatz. Das Volumen eines Kegels hat zum Maaße den dritten Theil des Products aus den Flächenraum der Basis in die Höhe — — 246

Anmerkung über den schiefen Kegel — — 247

§. 275. Aufgabe. Das Volumen eines durch eine der Basis parallele Ebne abgekürzten Kegels zu finden — 247

§. 276. Wenn sich ein Rechteck um eine seiner Seiten herum bewegt, so wird der Körper erzeugt, welchen man den geraden Cylinder nennt — — 247

Die Grundflächen eines Cylinders, so wie alle diesen Grundflächen parallele Schnitte sind gleiche und parallele Kreise 248

Die Seite, um welche sich das erzeugende Rechteck bewegt, wird die Axe genannt — — 248

Anmerkung über den schiefen Cylinder — 248

§. 277. Lehrsatz. Man kann immer zwey Prismata, ein in dem geraden Cylinder eingeschriebenes und ein um denselben beschriebenes von der Beschaffenheit finden, daß der Unterschied ihrer Oberflächen kleiner als jede noch so kleine Größe werden kann — — 249

Da die Gränzen dieser Prismen auf ihrer Grundfläche senkrecht stehen, so heißen sie gerade Prismata, alle übrige sind schiefe Prismata — — — 250

§. 278. Zusatz. Man kann immer entweder ein eingeschriebenes oder ein umgeschriebenes Prisma von der Beschaffenheit finden, daß die Oberfläche desselben um so wenig als man will von der des geraden Cylinders unterschie-

Seite

den ist, indem die erste kleiner, die andre aber größer als die des Cylinders ist — — 251

§. 279. Lehrsatz. Der Flächeninhalt der Oberfläche eines geraden Cylinders hat zum Maaße das Product aus dem Umkreise der Basis in die Höhe — — 251

§. 280. Lehrsatz. Man kann immer zwey Prismata, ein eingeschriebenes und ein umschriebenes, von der Beschaffenheit finden, daß ihre Volumen um so wenig als man will von einander unterschieden sind — 251

§. 281. Zusatz. Man kann entweder ein eingeschriebenes oder ein umschriebenes Prisma von der Beschaffenheit finden, daß ihr Volumen um so wenig als man will von dem des geraden Cylinders unterschieden ist, indem das erste kleiner und das zweyte größer als der Cylinder ist 252

§. 282. Lehrsatz. Das Volumen eines geraden Cylinders hat zum Maaße das Product aus dem Flächenraum der Basis in die Höhe — — — 252

Anmerkung über den schiefen Cylinder — 253

§. 283. Wenn sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser bewegt, so erzeugt er die Kugel, und der ihn umgebende halbe Umkreis erzeugt die Kugelfläche 253

Der Durchmesser, um welchen sich der Halbkreis bewegt, ist die Axe, und seine beyden äußersten Puncte sind die Pole 253

Alle Puncte der Kugelfläche haben vom Mittelpuncte des erzeugenden Kreises gleiche Entfernung — 253

§. 284. Lehrsatz. Jeder in der Kugel durch eine Ebne gemachter Schnitt ist immer ein Kreis — 254

§. 285. Anmerkung. Die Kreise, welche durch den Mittelpunct der Kugel gehen, heißen größte Kreise, alle andre sind kleinere Kreise — — 254

Alle größte Kreise sind einander gleich — 254

§. 286. Zusatz. Zwey sich schneidende größte Kreise halbiren einander — — — 254

Seite

§. 287. Drey Kreise, von denen je zwey und zwey einander auf der Kugelfläche schneiden, bilden ein sphärisches Dreyeck; in den Anfangsgründen der Geometrie betrachtet man nur dasjenige, welches von dreyen größten Kreisen gebildet wird — — — 255

§. 288. Lehrsatz. Die Summe jeder zwey Seiten eines sphärischen Dreyecks ist immer größer als die dritte 255

§. 289. Zusatz. Der kürzeste Weg, um von einem Puncte einer Kugelfläche zum andern zu kommen ist der Bogen des von der durch diese beyden Puncte und dem Mittelpuncte gehenden Ebne bestimmten Kreises — 256

§. 290. Zusatz Die Summe aller drey Seiten eines sphärischen Dreyecks ist immer kleiner als der Umfang eines größten Kreises — — — 257

§. 291. Lehrsatz Wenn man aus dem Mittelpuncte irgend eines auf der Kugelfläche gezogenen Kreises eine senkrechte errichtet, so geht sie durch den Mittelpunct der Kugel und schneidet sie in zwey Puncte, deren jeder von allen Puncten des Umkreises des vorgelegten Zirkels gleichen Abstand hat — — — 257

§. 292. Zusatz. Jeder dieser Puncte, welche man Pole nennt, können dienen diesen Kreis zu beschreiben 258

Die sie verbindende Gerade ist die Axe eben dieses Kreises 259

§. 293. Lehrsatz. Die durch irgend einen Punct der Kugelfläche auf den dur diesen Punct gehenden Halbmesser senkrecht geführte Ebne berührt die Kugel; und umgekehrt ist jede eine Kugelfläche in irgend einem Puncte berührende Ebne auf dem durch diesen Punct gehenden Halbmesser senkrecht — — — 259

§. 294. Lehrsatz. Zwey correspondirende Polygone, von denen das eine in dem erzeugenden Kreise eingeschrieben und das andre um denselben beschrieben ist, bilden, indem sie sich um den Durchmesser dieses Kreises bewegen,

Seite

zwey Körper, deren Oberflächen um jede noch so kleine gegebene Größe von einander verschieden seyn können 260

Die Obesfläche eines jeden dieser Körper hat zum Maaße das Product aus dessen Höhe in den Umkreis des in dem sie erzeugenden Polygone eingeschriebenen Kreises 261

§. 295. Zusatz. Die Oberfläche des eingeschriebenen Körpers ist kleiner, und die des umschriebenen Körpers ist größer als der correspondirende Theil der Kugelfläche; man kann indessen immer zwey dieser Körper finden, deren Oberfläche um so wenig als man will von der des Theils der Kugel unterschieden ist — — 263

§. 296. Lehrsatz. Die Oberfläche eines Kugelabschnitts ist gleich dem Producte aus dessen Höhe in den Umkreis eines größten Zirkels — — — 263

§. 297. Erster Zusatz. Die Oberfläche der ganzen Kugel ist, gleich ihrem Durchmesser, multiplicirt durch den Umkreis eines größten Kreises, und die irgend einer Zone ist gleich der Höhe dieser Zone multiplicirt durch einen größten Kreis — — — 264

§. 298. Zweyter Zusatz. Die Kugelfläche ist vier Mahl größer als die eines ihrer größten Kreise — 265

§. 299. Lehrsatz. Die Oberfläche des zwischen zweyen größten Kreisen liegenden Theils der Kugel verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie sich der ebne Winkel, welcher den von diesen beyden Ebnen eingeschlossenen Flächenwinkel mißt, zu vier rechten verhält — 265

§. 300. Lehrsatz. Die Oberfläche eines sphärischen Dreyecks verhält sich zur Kugelfläche wie die Differenz zwischen der Summe der drey von den Ebnen der Kreise, welche das Dreyeck zusammensetzen, gebildeten Flächenwinkel und zweyen rechten sich zu acht rechten Winkeln verhält 267

Anmerkung, worin für den vorhergehenden Satz bewiesen wird,

Seite

wird, daß zwey sphärische Dreyecke, worin die Seiten gleich, aber in einer umgekehrten Ordnung zusammengestellt sind, einander gleich seyn müssen — 267

§. 301. Lehrsatz. Die Differenz der Volumen der Körper, welche von zweyen correspondirenden Theilen regulärer Polygone, einem in einem Kreisbogen eingeschriebenen und einem um denselben beschriebenen, durch die Bewegung dieses Kreisbogens erzeugt, und von der unter eben diesen Umständen durch die von dem die beyden Theile der Polygone begränzenden Halbmesser beschriebenen Kugelfläche begränzt werden, kann so klein als man will werden — — — — 270

Das Volumen eines jeden dieser Körper hat zum Maaße die Summe der von den Seiten des erzeugenden Polygons beschriebenen Flächen multiplicirt durch den dritten Theil des Halbmessers des in diesem Polygon eingeschriebenen Kreises — — — 271

2. 302. Zusatz. Der durch die Umdrehung des Kreisausschnitts entstandene Kugelausschnitt ist kleiner als der umschriebene und größer als der eingeschriebene Körper; allein sein Unterschied von dem einen und dem andern dieser Körper kann so klein als man will werden 273

§. 303. Lehrsatz. Das Volumen eines Kugelausschnitts ist gleich der Fläche des Kugelabschnitts, worauf er steht, multiplicirt durch den dritten Theil des Halbmessers 273

§. 304. Erster Zusatz. Das Volumen der Kugel ist gleich ihrer Oberfläche multiplicirt durch den dritten Theil des Halbmessers, oder der Fläche eines ihrer größten Kreise multiplicirt durch zwey Drittheile des Durchmessers 274

§. 305. Zweyter Zusatz. Das Maaß eines Kugelausschnitts wenn er auch größer als die Halbkugel ist, wird noch immer wie in §. 303. gefunden — — 274

§. 306. Dritter Zusatz. Das Volumen eines Kugelabschnitts wird gefunden, wenn man von dem des Kugelausschnitts das des correspondirenden Kegels abzieht — 275

Seite

Das Volumen der Zone wird erhalten, wenn man sie als die Differenz der beyden durch die sie begränzenden Ebnen auf der Kugel gebildeten Segmente betrachtet 275

Von der Vergleichung der runden Körper 275

§. 307. Unter runde ähnliche Körper versteht man diejenigen, welche durch die Umdrehung ähnlicher Figuren erzeugt werden — — — 275

In ähnlichen Kegeln sind die Seiten, die Höhen, die Halbmesser ihrer Grundflächen und ihre Umkreise proportional; die Grundflächen selbst verhalten sich wie die Quadrate homologer Linien; dasselbe gilt von ähnlichen Cylindern 276

Die Kugeln sind ähnliche Körper — — 276

§. 308. Lehrsatz. Die Oberflächen ähnlicher Kegel verhalten sich wie die Quadrate der Seiten dieser Kegel, und ihre Volumen wie die Cuben eben dieser Seiten — 276

§. 309. Lehrsatz. Die Oberflächen ähnlicher Cylinder verhalten sich wie die Quadrate der Seiten dieser Cylinder, und ihr Volumen wie die Cuben eben dieser Linien 277

§. 310. Lehrsatz. Die Oberflächen der Kugel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser und ihre Volumen wie die Cuben eben dieser Linien 277

§. 311. Anmerkung Die convexe Fläche des um eine Kugel beschriebenen Cylinders ist der dieser Kugel gleich, und das Volumen dieser letztern ist nur zwey Drittheile von dem des erstern — — — 278

§. 312. Schlußfolge, in welcher gezeigt wird, daß es nur fünf Arten regulärer Polyedra geben kann, und daß die Seitenflächen derselben nur gleichseitige Dreyecke, Quadrate und Fünfecke seyn können — — 279

Zusätze — — — — 281

Von der Berechnung der Flächen — — 284

Von der Berechnung der Körper — — 291

Supplement

zu den Anfangsgründen der Arithmetik, um von denselben unmittelbar zur Geometrie übergehen zu können.

I.

Um den Vortrag abzukürzen, drückt man die am häufigsten vorkommenden Wörter durch besondre Zeichen aus, und wenn man sich mit einer Zahl oder irgend einer Größe beschäftigt, ohne ihren besondern Werth zu betrachten, sondern bloß um ihre Beziehungen mit andern Größen, oder die Operationen anzuzeigen, welchen sie unterworfen werden muß, so bezeichnet man sie durch einen Buchstaben des Alphabets, welcher dann die abgekürzte Benennung dieser Größe wird.

\+ bedeutet plus oder hinzugesetzt zu.

Der Ausdruck A + B zeigt die Summe an, welche erfolgt, wenn man zu der durch A vorgestellten Größe die durch B ausgedrückte hinzusetzt, oder A plus B.

— bezeichnet weniger (minus)

A — B zeigt das an, was übrig bleibt, wenn man von der durch A bezeichneten Größe die durch B ausgedrückte abzieht, oder A minus B.

× bezeichnet multiplicirt durch.

A × B zeigt das erfolgende Product, wenn die

durch A bezeichnete Größe durch B multiplicirt wird, oder A multiplicirt durch B.

$\frac{A}{B}$ zeigt die erfolgenden Quotienten, wenn die durch A vorgestellte Größe durch die durch B angezeigte dividirt, oder A dividirt durch B.

$A = B$ bezeichnet, daß die Größe A der Größe B gleich sey oder A ist gleich B.

$A > H$ bezeichnet, daß die Größe A die Größe B übertrift. oder A ist größer als B.

$A < B$ bezeichnet A ist kleiner als B.

2A, 3A ꝛc. zeigen das Doppelte, das Dreyfache ꝛc. der Größe, welche A vorstellt.

II.

Wenn eine Zahl durch sich selbst multiplirt wird, so bildet wan ihre zweyte Potenz oder ihr Quadrat: 5×5 oder 25 ist die zweyte Potenz von 5 oder das Quadrat von 5.

Die zweyte Potenz ist also ein Producrt aus zweyen gleichen Factoren; jeder dieser Factoren ist die Quadratwurzel des Products: 5 ist die Quadratwulzel von 25.

Multiplicirt man die zweyte Potenz durch ihre Wurzel, so erhält man die dritte Potenz oder den Cubus.

5×25 oder 125 ist die dritte Potenz von 5.

Die dritte Potenz ist ein aus der Multiplication dreyer gleichen Factoren gebildetes Product, jeder dieser Factoren ist die Cubikwurzel dieses Products: 125 ist das Product aus 5 zwey Mahl durch sich selbst multiplicirt dder $5 \times 5 \times 5$, und 5 ist die Cubikwurzel von 125.

Im Allgemeinen zeigt A^2 indem es eine Abkürzung von $A \times A$ ist die zweyte Potenz oder das Quadrat von A.

$\sqrt{A}$ zeigt die Quadratwurzel aus A oder die Zahl, welche durch sich selbst multiplicirt die durch A bezeichnete Zahl zum Producte hat.

A^3 zeigt, indem es eine Abkürzung von $A \times A \times A$ ist die dritte Potenz oder den Cubus von A an.

$\sqrt[3]{A}$ zeigt die Cubikwurzel aus A an, oder die Zahl, welche zweymal durch sich selbst multiplicirt die Zahl A hervorbringt.

Nicht alle Zahlen sind vollkommene Quadrate oder Cuben, das heißt, sie haben keine Quadrat oder Cubikwurzeln, die man genau ausdrücken könnte: 19 zum Beyspiel hat, indem sie zwischen 16, dem Quadrate von 4, und 25 dem Quadrate von 5 liegt zur Wurzel eine zwischen 4 und 5 liegende Zahl, die man aber nicht genau angeben kann.

Desgleichen wird 89, da sie sich zwischen 64, dem Cubus von 4, und 125 dem Cubus von 5 befindet, zur Cubikwurzel eine zwischen 4 und 5 liegende Zahl haben, die sich indessen nicht genau angeben läßt. In den Anfangsgründen der Algebra findet man Methoden sich den Quadrat und Cubikwurzeln der Zahlen, welche keine vollkommene Quadrate sind, so viel als man will zu nähern.

(Der folgende §. muß unmittelbar vor §. 58. studirt werden.)

III.

1) Wenn zwey Proportionen ein gemeinschaftliches

Verhältniß haben, so kann man offenbar die beyden andern Verhältnisse in Proportion setzen, weil sie den gemeinschaftlichen gleich sind.

Wenn man hat

$$A : B = C : D$$
$$E : F = C : D$$

so muß nothwendigerweise daraus erfolgen

$$A : B = E : F.$$

2) Wenn zwey Proportionen dieselben Vorderglieder haben, so kann man die Hinterglieder in Proportion setzen; denn wenn man hat

$$A : B = C : D$$
$$A : E = C : F,$$

so werden diese Proportionen, wenn die mittlern Glieder verwechselt werden

$$A : C = B : D,$$
$$A : C = E : F,$$

woraus man schließen kann

$$B : D = E : F,$$

welches auf

$$B : E = D : F$$

zurück kommt.

Man kann in den Proportionen noch andre Veränderungen vornehmen, welche ebenfalls nicht die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder aufheben.

1) Wenn man zum hintern Glied eines Verhältnisses sein vorderes hinzu setzt, und diese Summe mit dem vordern vergleicht, so wird dieses letztere ein Mahl mehr in dieser Summe enthalten seyn, als es im ersten

hintern war; das neue Verhältniß wird also dem ersten um eine Einheit vermehrt gleich seyn. Verfährt man auf diese Art mit den beyden Verhältnissen einer Proportion, so werden daraus offenbar zwey neue gleiche Verhältnisse, und folglich eine neue Proportion entstehen.

Hat man zum Beyspiel die Proportion

$$4 : 6 = 12 : 18,$$

so wird man haben

$$6 + 4 : 4 = 18 + 12 : 12$$

oder

$$10 : 4 = 30 : 12.$$

2) Wenn man vom hintern Gliede eines Verhältnisses das vordere abzieht, und die Differenz mit dem vordern vergleicht, so wird die Differenz darin ein Mahl weniger enthalten seyn, als im ersten hintern Gliede; das neue Verhältniß wird also dem ersten Verhältniß um eine Einheit vermindert gleich seyn. Macht man nun dieselben Operationen bey den beyden Verhältnissen einer Proportion, so werden daraus zwey neue einander gleiche Verhältnisse erfolgen, und folglich eine neue Proportion.

Aus der Proportion

$$4 : 6 = 12 : 18$$

leitet man auf diese Art her

$$6 - 4 : 4 = 18 - 12 : 12,$$

odee

$$2 : 4 = 6 : 12.$$

Bey einer zwischen beliebigen durch Buchstaben ausgedrückten Größen statt habenden Proportion

$$A : B = C : D,$$

wird man durch die obige Veränderungen haben

$$B + A : A = D + C : C$$
$$B - A : A = D - C : C,$$

Verwechselt man in diesen letztern die mittlern Glieder, so wird kommen

$$A + A : D + C = A : D$$
$$B - A : D - C = A : C;$$

aber durch eben diese Veränderung verwandelt sich die Proportion

$$A : B = C : D$$

in

$$A : C = B : D,$$

und da die Verhältnisse $A : C = B : D$ einander gleich sind, so kann man daraus schließen

$$B + A : D + C = A : C \text{ oder } = B : D$$
$$B - A : D - C = A : C \text{ oder } = B : D,$$

ein Resultat, welches folgendermaßen vorgetragen werden kann;

In einer jeden Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz der beyden ersten Glieder zur Summe oder Differenz der beyden letzten Glieder, wie sich das erste zum dritten oder das zweyte zum vierten verhält.

Da ferner die beyden Verhältnisse $A : C$ oder $B : D$ den beyden letztern der obigen Proportionen gemein sind, so folgt, daß auch die andern Verhältnisse eben dieser Proportionen einander gleich sind, und daß folglich

$$B + A : D + C = B - A : D - C,$$

oder, wenn die mittlern Glieder verwechselt werden

$$B + A : B - A = D + C : D - C,$$

das heißt: Die Summe der beyden ersten Glieder in einer Proportion verhält sich zu ihrer Differenz, wie sich die Summe der beyden letzten Glieder zu ihrer Differenz verhält.

Zum Beyspiel

$$6 + 4 : 6 - 4 = 18 + 12 : 18 - 12,$$

oder

$$10 : 2 = 30 : 6.$$

IV.

Wenn die Proportion

$$A : B = C : D$$

in

$$A : C = B : C$$

verwandelt wird, so sind A und B die vordern Glieder, C und D die hintern; und die Proportionen

$$B + A : D + C = A : C \text{ oder } = B : D$$

$$B - A : D - C = A : C \text{ oder } = B : D$$

können folgendermaßen vorgetragen werden.

Die Summe oder die Differenz der vordern Glieder einer Proportion verhält sich zur Summe oder Differenz der hintern Glieder, wie sich ein vorderes Glied zu seinem hintern Gliede verhält.

Hieraus leitet man her, daß sich die Summe der vordern Glieder zu ihrer Differenz verhält, wie die Summe der hintern Glieder zu ihrer Differenz.

V.

Wenn man eine Reihe gleicher Verhältnisse hat

$$A : B = C : D = E : F,$$

so kann man, wenn zuvörderst nur die beyden ersten betrachtet werden, welche die Proportion

$$A : B = C : D$$

bilden, nach dem Vorhergehenden daraus herleiten

$$A + B : C + D = A : B;$$

und da das dritte Verhältniß E : F dem ersten A : B gleich ist, so wird man haben

$$A + B : C + D = E : F,$$

Nimmt man in dieser Proportion die Summe der vordern und die der hintern Glieder, so wird daraus erfolgen

$$A + B + E : C + D + F = E : F \text{ oder } = A : B.$$

Wenn man diesen Weg bey jeder beliebigen Anzahl gleicher Verhältnisse verfolgt, so würde man zuletzt erhalten: Die Summe irgend einer Anzahl vorderer Glieder verhält sich zur Summe ihrer hintern Glieder, wie sich ein Vorderglied zu seinem Hintergliede verhält.

VI.

Wenn man irgend zwey Proportionen nimmt

$$A : B = C : D$$

$$E : F = G : H,$$

und man multiplicirt sie nach der Ordnung, das heißt ein Glied der einen mit dem correspondirenden Gliede der andern, so werden die Producte eine Proportion bilden, worin man hat

$$A \times E : B \times F = C \times G : D \times H.$$

Dieses ist offenbar, weil die neuen Verhältnisse $\frac{B \times F}{A \times E}$

$\frac{D \times H}{C \times G}$ respectiv die Producte der ersten einander gleichen Verhältnisse

$$\frac{B}{A} \text{ und } \frac{F}{E}, \quad \frac{D}{C} \text{ und } \frac{H}{G}$$

sind.

Multiplicirt man die Proportion

$$A : B = C : D$$

durch

$$A : B = C : D,$$

so wird man haben (II)

$$A^2 : B^2 = C^2 : D^2,$$

woraus folgt, daß die Quadrate der vier in Proportion stehenden Größe eine neue Proportion bilden.

Multiplicirt man die Proportion

$$A^2 : B^2 : C^2 : D^2$$

durch

$$A : B = C : D$$

so wird man haben

$$A^3 : B^3 = C^3 : D^3,$$

das heißt, die Cuben von vier in Proportion stehenden Größen bilden ebenfalls eine Proportion.

(Der folgende §. bezieht sich auf §. 76.)

VII.

Man denkt sich öfters Größen in verschiedene Theile zerlegt, und sieht sich genöthigt sie zusammen zu setzen, von einander abzuziehen, oder sie in diesem Zustande zu multipliciren, das heißt zu bestimmen, wie die Resultate dieser Operationen aus den Theilen der vorgelegten

Größe gebildet werden. Hier sind einige Regeln über diesen Gegenstand.

1) Es ist klar, daß man, wenn die Größe B — C zur Größe A hinzugesetzt werden soll, A + B — C schreiben muß, weil weder B noch C, sondern der Ueberschuß von B über C zu A hinzu gesetzt werden soll;

M P Q N

nimmt man die Geraden MP, PN und QN um die Größen A, B, C darzustellen, so sieht man daß

$$PQ = PN - QN$$
$$MP + PQ = MP + PN - QN.$$

2) Wenn man von der Größe A die Größe B — C abziehen wollte, so müßte man schreiben A + C — B, oder welches einerley ist, A — B + C.

Denn die Differenz zweyer Größen wird nicht geändert, wenn man zu jeder derselben einerley Größe hinzu seyt; setzt man also C zu B — C hinzu, so kommt B; giebt man der Größe A denselben Zusatz, so erhält man A + C, und die Subtraction giebt alsdann A + C — B.

M P Q N.

Die obige Figur bestätigt dieses Resultat, denn wenn man die Geraden MN, PN, PQ für die Größen A, B, C nimmt, erhält man

$$QN = PN - PQ,$$
$$MN - QN = MQ = MP + PQ,$$

und da $MP = MN - PN$, so kommt

$$MP + PQ = MN - PN + PQ,$$

welches Resultat mit A — B + C übereinstimmt.

3) Das

3) Das Product der Größe A durch die Größe B + C ist durch A × B + A × C ausgedrückt; denn es muß die Zahl A so viel Mahl enthalten als Einheiten in der Summe der Zahlen B und C sind, und muß folglich zusammengesetzt seyn aus A so viel Mahl genommen, als Einheiten in C sind, welches folgendermaßen geschrieben wird A × B + A × C.

4) Das Product aus A in B — C wird durch A × B — A × C ausgedrückt seyn; denn bezeichnet man B — C durch D, so wird man offenbar haben B = D + C, und folglich A × B = A × D + A × C; hieraus folgt daß A × D = A × B — A × C, welches den vorgetragenen Satz bildet, indem D = B — C.

VIII.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß das Quadrat einer aus zweyen Theilen zusammengesetzten Zahl, aus dem Quadrate des ersten Theils, dem doppelten Producte aus dem ersten Theil in dem andern und dem Quadrate des andern Theils bestehen wird. Da zum Beyspiel die Zahl 13 als der Größe 9 + 4 gleich angesehen werden kann, so wird das Quadrat derselben 169

aus dem Quadrate von	9	oder 81
dem zweyfachen Producte	9 × 4	oder 72
und dem Quadrate von	4	oder 16
	Summa	169

zusammengesetzt seyn.

Um dieses allgemein zu beweisen, darf man bloß in Erwägung ziehen, daß, weil das Product von A durch

$B + C$, $A \times B + A \times C$ ist, diese Partialproducte $A \times B + A \times C$, wenn man $A = B + C$ setzt, sich in $B \times B + BC$, und $B \times C + C \times C$ verwandeln werden; nimmt man sie zusammen, so erhält ma das Resultat

$$B \times B + B \times C + B \times C + C \times C,$$

welches auf folgendermaßen geschrieben werden kann,

$$B^2 + 2BC + C^2,$$

und welches das Quadrat von $B + C$ dem obigen Vortrage gemäß giebt.

Man findet auf eine ähnliche Art, daß das Quadrat der Differenz zweyer Größen aus dem Quadrate der ersten weniger dem zweyfachen Producte aus beyden Größen, und dem Quadrate der zweyten zusammengesetzt sind. Da zum Beyspiel 9 gleich ist $13 - 4$, so wird das Quadrat derselben 81 aus $169 - 2$ Mahl $4 \times 13 - 16$ zusammengesetzt seyn, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Der allgemeine Beweis dieses Satzes wird gebildet, wenn man in dem Product von A in die Differenz $B - C$, $A = B - C$ setzt; denn da dieses Product $A \times B - A \times C$ ausgedrückt ist, so erhält man, wenn in den Producten $A \times B$ und $A \times C$ zuvörderst $B - C$ statt A gesetzt wird,

$$B \times B - B \times C \text{ und } B \times C - C \times C,$$

und um das zweyte vom ersten abzuziehen, braucht man bloß nach §. VI. zu schreiben

$$B \times B - B \times C - B \times C + C \times C,$$

welches auf

$$B^2 - 2B \times C + C^2$$

zurück kommt, und das Quadrat von B — C dem obigen Vortrage gemäß giebt.

Die vorhergehenden Begriffe sind hinreichend, um die nöthigsten Sätze der Geometrie verstehen zu können; denn im §. 141. kann man sich auf die graphische Auflösung einschränken, und die §. 150, 156, 157 kann man übergehen, da sie das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser zu berechnen dienen, welches man leicht in der Trigonometrie durch die Sinus und Tangenten der kleinen Bogen erhalten kann.

Bemerkung.

In der Form des zur Auseinandersetzung der Anfangsgründe der Geometrie angenommenen Raisonnements ist:

Ein Axiom eine an und für sich evidente Wahrheit.

Ein Lehrsatz ein zu beweisender Satz.

Ein Zusatz eine unmittelbare Folgerung aus einem schon bewiesenen Satze.

Ein Problem ist eine aufzulösende Aufgabe.

Ein Satz, welcher einem andern zur Vorbereitung dient, heißt ein Lehrsatz.

Die Anmerkungen erhalten auch den Nahmen der Scholien.

Es ist beyläufig zu merken, daß ein Lehrsatz zwey Theile hat, nehmlich die Hypothese und die Conclusion, welche eine Folgerung daraus ist; es ist nicht im-

mer möglich, den Vortrag umzukehren; das heißt, wenn man die Conclusion für die Hypotheſe nimmt, ſo hat man nicht immer die erſte Hypotheſe zur nöthigen Concluſion; und dieſes rührt daher, weil die Concluſion öfters mit einer größern Anzahl Fällen als die Hypotheſe übereinkommt. Daher rührt die Nothwendigkeit die umgekehrten Sätze zu beweiſen, wenn man Gebrauch davon machen will.

Anfangs-

Anfangsgründe der Geometrie.

Allgemeine Begriffe von der Ausdehnung.

§. 1.

Der Raum, welchen die Körper einnehmen, muß nothwendigerweise drey Abmessungen (Dimensionen) haben, welche man mit den Nahmen der Länge, Breite und Tiefe oder Höhe belegt.

Man kann einem Körper keine einzige dieser Dimensionen nehmen, wenn er Körper bleiben soll; er ist aber auch nur dann im unbestimmten Raume gegeben, wenn er endlich ist, oder wenn er Gränzen hat, da er ohne diese nicht wahrgenommen werden kann. Diese Gränzen, welche uns in die Sinne fallen, und welche keine Tiefe haben, werden Flächen genannt.

Wenn ein Körper verschiedene Seiten darstellt, so hat eine jede derselben in dem Orte, wo sie mit einer andern zusammenstößt, ihre Gränzen, welche weder Höhe noch Breite haben, und Linien heißen.

Auch die Linien haben in dem Orte, wo sie einander schneiden, ihre Gränzen, welche weder Höhe noch Breite, noch Länge haben, und welche Puncte heißen.

Das Daseyn dieser verschiedenen Arten von Gränzen kann in keinen Zweifel gezogen werden, weil wir nur durch sie im Stande sind von der Gestalt oder Figur der Körper zu urtheilen. Wir werden sie, jede ins Besondre, in Gedanken betrachten, indem wir von einer oder von zweyen der Dimensionen des Körpers abstrahiren; da wir aber nur die Form oder die Gestalt der Körper der Veränderung unterwerfen können: so geschehen alle unsre Operationen immer an Körpern, und nie an Flächen, Linien oder Puncten; und ihr Resultat entfernt sich desto weniger von dem der Vernunft, je mehr wir bemühet sind, diejenigen Dimensionen zu vermindern, welche denen der Gränze, die wir an dem Körper betrachtet haben, fremdartig sind. Durchs Raisonnement erhalten wir diese Gränze; durch die Rechnung können wir ihr unendlich nahe kommen; allein durch mechanische Operationen ist dieses unmöglich, weil ihrer Genauigkeit durch die unvermeidliche Unvollkommenheit der Instrumente Gränzen gesetzt werden.

§. 2.

Bey der Untersuchung der Linien kommen wir unstreitig zuerst auf die gerade Linie, von der wir einen klaren Begriff geben, wenn wir sie so erklären, daß sie der kürzeste Weg sey, um von einem Puncte zum andern zu kommen.

In diesem Begriff liegt auch die Möglichkeit, die

gerade Linie über jede ihrer festgesetzten Gränzen hinaus, ins Unendliche zu verlängern, und auch die Unmöglichkeit, dieses auf mehrere Arten zu bewerkstelligen.

Es ist einleuchtend, daß es nur eine einzige gerade Linie giebt; jede Linie, welche nicht gerade, oder aus mehrern geraden zusammengesetzt ist, ist **krumm**, und man sieht leicht ein, daß es eine unzählige Menge krummer Linien geben muß.

Von den verschiedenen Flächen, welche die Körper begränzen, zieht die ebne **Fläche**, oder die **Ebne**, zuerst unsre Aufmerksamkeit auf sich, welche von jeder andern darin unterschieden ist, daß sich auf ihr überall, wo man nur will, eine gerade Linie ziehen läßt, und diese Eigenschaft kann nur eine einzelne Gattung von Flächen haben.

Alle Flächen, die keine Ebnen, oder die nicht aus mehrere Ebnen zusammengesetzt sind, heißen **krumme** Flächen, und die Anzahl dieser ist unendlich.

Nach und nach sollen die Haupteigenschaften der Linien, Flächen und Körper untersucht werden, und wir werden uns nur bey denen aufhalten, die unumgänglich nöthig sind, um die verschiedenen Zweige der reinen und angewandten Mathematik mit Nutzen studiren zu können.

Erste Abtheilung.

Erster Abschnitt *).

Von den Eigenschaften der geraden und der Kreislinien.

Erklärungen und vorläufige Begriffe.

§. 3.

In den Anfangsgründen der Geometrie betrachtet man nur zwey Arten von Linien, nehmlich die **gerade Linie**, oder schlechtweg die **Gerade**, welche der kürzeste Weg zwischen zweyen Puncten ist, und die **Kreislinie, Zirkellinie**, welche die Eigenschaft hat, daß alle Puncte derselben von einem in derselben Ebne liegenden Punct, welchen man den **Mittelpunct** derselben nennt, gleich weit entfernt sind.

So ist AB Fig. 1. eine Gerade; es ist offenbar (§. 2.), daß uns nichts hindert, die gerade AB sowohl auf dieser Seite des Punctes A, als auf der andern Seite des Punctes B, ins Unendliche zu verlängern, und daß sie eben so wie durch die Puncte A und B, durch irgend zwey andre Puncte C und D bestimmt werden

*) In diesem ersten Abschnitte wird überall vorausgesetzt, daß die in den Figuren vorgestellten Linien, in einer und derselben Ebne liegen.

könne, d. h. daß wenn man durch C und D eine gerade Linie legen sollte, diese mit der Linie AB zusammenfiele.

ABCD Fig. 2. ist der Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunct O ist. Die Geraden AO, BO, CO, welche den Abstand von was immer für Puncte dieser krummen Linie vom Mittelpuncte O bestimmen, und welche alle einander gleich sind, werden Halbmesser, Radien des Zirkels genannt; ein jeder beliebiger Theil des Umkreises heißt ein **Kreisbogen**; endlich versteht man unter **Kreis, Zirkel**, denjenigen Theil der Ebne, welcher überall von der Kreislinie eingeschlossen ist.

Es ist einleuchtend, daß man alle Puncte, welche von einem Puncte O um die gegebene Länge ao entfernt sind, finden kann, wenn man aus diesem Puncte O, als aus einem Mittelpnncte, mit einem der Linie ao gleichen Halbmesser eine Kreislinie beschreibt.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir zuvörderst die gerade Linie betrachten.

§. 4.

Die Entfernung zweyer Puncte, oder die Länge einer geraden Linie messen, heißt nichts anders, als untersuchen, wie viel Mahl diese gerade Linie eine andre als Einheit genommene, in sich begreift. Dieses geschieht, wenn man die zweyte, so oft als es möglich ist, auf die erste trägt; und wenn man einen Rest finden sollte, so muß man diesen in Theilen der zweyten Linie oder der Einheit auszudrücken suchen.

Ueberhaupt heißt eine Linie durch eine andre messen, das Verhältniß dieser beyden Linien bestimmen.

oder untersuchen, ob es nicht eine kleinere Linie giebt, die in der einen sowohl als in der andern eine Anzahl Mahl genau enthalten, und folglich das gemeinschaftliche Maaß beyder ist. Diese Untersuchung ist also in Betreff der Linien dasselbe, was die des gemeinschaftlichen Theilers bey Zahlen ist.

§. 5. Aufgabe.

Es sind zwey gerade Linien gegeben; man soll das gemeinschaftliche Maaß derselben, oder wenigstens das Annäherungsverhältniß der einen Linie zur andern finden.

Auflösung.

Es seyen AB und CD Fig. 3. diese beyden Graden; man trage die kleinere CD, so oft es angeht, auf die größere; hier wird sich finden, daß sie drey Mahl in derselben von A bis E enthalten ist, und den Rest EB läßt, so daß man haben wird

$$AB = 3CD + EB.$$

Man trage hiernächst den Rest EB auf CD; dieser ist darin vier Mahl enthalten und läßt den Rest FD, welches giebt

$$CD = 4EB + FD.$$

Man trage ferner diesen zweyten Rest auf EB, und da er darin von E bis G ein Mahl enthalten ist, und den Rest GB läßt, so wird man haben

$$EB = FD + GB.$$

Wird endlich GB auf FD getragen, so findet sie sich darin genau drey Mahl enthalten, und man wird folglich zum letzten Resultat haben

FD = 3 GB.

Geht man vom Werthe von FD auf den von EB, von diesem auf den von CD, und von diesem letztern auf den von AB zurück, so wird man successiv finden

FD = 3 GB, EB = 4 GB, CD = 19 GB, AB = 61 GB,

woraus man sieht, daß der letzte Rest GB das gemeinschaftliche Maaß der beyden Linien AB und CD ist; und da er 61 Mahl in der ersten und 19 Mahl in der zweyten enthalten ist: so folgt daraus, daß sich diese beyden Linien wie 61 zu 19 verhalten.

Es ist nun nichts leichter, als dieses Verfahren auf jedes andre Beyspiel anzuwenden. Die Vergleichung der successiven Reste muß so weit getrieben werden, bis man einen findet, welcher eine Anzahl Mahl in den ihm nächst vorhergehenden genau enthalten, oder, welcher so beschaffen ist, daß der Rest, welchen er bey dieser Operation lassen könnte, nicht mehr vermittelst der Sinne wahrgenommen werden kann. Durch dieses Verfahren gelangt man wenigstens zu einem Annäherungsverhältniß.

§. 6.

Es ist einleuchtend, daß eine gerade Linie eine andre nur in einem einzigen Puncte begegnen könne (§. 3.).

§. 7.

Der unbestimmte Raum BAC Fig. 4., welcher zwischen zweyen in einem Puncte A sich schneidenden Linien eingeschlossen ist, welche Linien man übrigens so weit als man will verlängern kann, wird ein Winkel genannt. Obschon dieser Raum, nach der Seite AB zu,

nicht begränzt ist, so ist er doch durch die Gränzen AB und AC vom übrigen Theil der Ebne abgesondert. In dieser Rücksicht können sich zwey Winkel von einander unterscheiden; die gerade Linie AD zum Beyspiel macht augenscheinlich mit AB einen größern Winkel, als der ist, den die geraden AB und AC mit einander einschließen.

Man bezeichnet gewöhnlich einen Winkel durch drey Buchstaben, wobey man denjenigen in die Mitte setzt, welcher an dem Puncte steht, in welchem beyde Linien einander schneiden, welcher Punct die Spitze oder der Scheitel des Winkels heißt. Der durch die Geraden AB und AC gebildete Winkel ist BAC. Wenn an einem Puncte nur ein einziger Winkel liegt, wie zum Beyspiel an a, so setzt man bloß den Buchstaben des Scheitels, und sagt, der Winkel a.

§. 8.

Zwey Winkel sind einander gleich, wenn sie aufeinander gelegt sich völlig denken. Der Winkel bac ist dem Winkel BAC gleich, wenn, nachdem man die Gerade ab dergestalt auf AB gelegt hat, daß der Punct a auf A zu liegen kommt, auch die andre Gerade ac auf AC fällt. Hier brauchen nicht die Linien AB und ab, AC und ac respectiv gleich zu seyn; denn es ist klar, daß wenn nur die Geraden AC und AB in den Theilen Ac′ und Ab′ ihrer Länge, von ac und ab gedeckt werden, sie es auch in den übrigen Theilen seyn werden, wenn man diese letztere genugsam verlängert.

§. 9.

Die respective Lage zweyer geraden Linien gegen

einander hängt von dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ab. Unter allen Lagen, welche eine gerade Linie gegen eine andre sie schneidende haben kann, ist die senkrechte, perpendikuläre, die bemerkenswertheste. Dieses Wort senkrecht zeigt den Fall an, wo eine gerade Linie AC Fig. 5., indem sie auf AB stößt, mit dieser letztern, wenn sie über den Punct A hinaus nach AD verlängert wird, zwey einander gleiche Winkel BAC und DAC bildet, das will sagen, daß wenn man die Figur längs der Linie AC zusammenlegt, der Theil AB der Geraden BD auf den andern Theil AD fallen muß.

Es ist offenbar, daß sich in diesem Falle die Gerade AC weder gegen A noch gegen B neigt.

Die Winkel BAC und CAD heißen **rechte Winkel.**

Jeder Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt ein **spitzer Winkel.** Der Winkel BAE ist ein spitzer Winkel.

Jeder Winkel, welcher größer als ein rechter ist, heißt ein **stumpfer Winkel.** Der Winkel BAF ist ein stumpfer Winkel.

Es ist klar, daß alle rechte Winkel einander decken müssen; daß z. B. der rechte Winkel A′B′D′ Fig. 5 *, wenn er auf den rechten Winkel ABD gelegt wird, diesen letztern genau decken muß. Denn wenn man, nachdem $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ gemacht worden, $A'C'$ auf AC trägt, so werden diese Geraden $A'C'$ und AC einander völlig decken, weil man zwischen zwey gegebene Puncte nur eine einzige gerade Linie legen kann; und wenn sodann die gerade Linie $B'D'$ nicht auf BD fiele, sondern eine andre Lage Bd bekäme, so würden die Win-

kel A′B′D′, D′B′C′, welche durch ABd, dBC vorgestellt sind, nicht einander gleich, und folglich keine rechte seyn.

§. 10.

Aus der 5ten Figur sieht man deutlich, daß die Summe aller Winkel BAE, EAC, CAF, FAD, welche von einer und derselben Seite einer geraden Linie um einen, auf derselben als Scheitel genommenen Punct, herum liegen, zweyen rechten gleich ist, so groß auch übrigens die Anzahl dieser Winkel seyn mag.

§. 11.

Wenn eine gerade Linie AE auf eine andre, von beyden Seiten des Vereinigungspunctes verlängerte gerade Linie fällt, so bildet sie mit dieser andern zwey Winkel EAB und EAD, welche zusammengenommen zwey rechte betragen.

Zwey sich schneidende gerade Linien BD und EF Fig. 6. bilden, wenn sie über ihren Vereinigungspunct A hinaus verlängert werden, um diesen Punct herum vier Winkel, von denen je zwey und zwey, nehmlich EAB und FAD, EAD und FAB, am Scheitel entgegengesetzt sind. Diese Winkel nennt man **Scheitelwinkel, Vertikalwinkel.**

§. 12. **Lehrsatz.**

Die von zweyen sich schneidenden Linien am Scheitel gebildeten entgegenstehenden Winkel, oder die Scheitelwinkel, sind einander gleich.

Beweis.

Aus dem vorhergehenden §. folgt, daß die Summe

der von einer und derselben Seite von DB liegenden Winkel BAE und DAE, zweyen rechten gleich ist, und daß die der von einerley Seite der Geraden EF liegenden Winkel DAE und DAF ebenfalls zweyen rechten gleich ist; hieraus folgt, daß die Winkel BAE und DAE zusammengenommen den Winkeln DAE und DAF zusammengenommen gleich sind. Zieht man von der einen und der andern dieser Summen den gemeinschaftlichen Winkel DAE ab, so bleibt der Winkel BAE seinem Scheitelwinkel DAF gleich.

Man könnte auf eben diese Art beweisen, daß der Winkel DAE dem Winkel BAF gleich ist.

§. 13. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß wenn man die gerade Linie AC Fig. 7., welche mit DB zwey rechte Winkel CAB und CAD bildet, unterhalb verlängert, ihre Verlängerung AE noch von der andern Seite von AB zwey rechte Winkel BAE und DAE bilden wird; denn da diese Winkel von den rechten Winkeln CAD und CAB Scheitelwinkel sind, so müssen sie ebenfalls rechte seyn (§. 9.).

Hieraus folgt ferner, daß wenn CE auf DB senkrecht ist, es auch DB auf CE seyn muß.

Wenn man daher durch den Punct A so viele gerade Linien FG, HI ꝛc. als man will zieht, so wird offenbar die Summe der Winkel FAB, FAC, CAH, HAD, DAG, GAE, EAI, IAB, welche alle diese Geraden mit einander einschließen, nie mehr als vier rechte betragen.

§. 14.

Durch eine geringere Anzahl gerader Linien als drey kann kein Raum eingeschlossen werden. Dieser Raum heißt ein Dreyeck. Von den Linien, welche es begränzen, schneiden sich je zwey und zwey, und bilden drey Winkel. ABC Fig. 8. ist ein Dreyeck, dessen Seiten AB, AC, BC, und dessen drey Winken A, B, C sind.

Da die ersten Eigenschaften des Dreyecks zur Basis desjenigen dienen, was die gegenseitige Lage der geraden Linien betrift, so ist es zweckmäßig sie zuerst vorzutragen, bevor wir weiter gehen.

§. 15.

Anmerkungen. Da die gerade Linie AB der kürzeste Weg ist, um vom Puncte A nach dem Puncte B zu kommen, so folgt, daß die Summe der beyden andern Seiten AC und BC des Dreyecks ABC größer als AB ist; und es ist eben so einleuchtend, daß die Summe irgend zweyer Seiten eines Dreyecks immer größer als die dritte ist.

Nimmt man aber innerhalb des Dreyecks ABC was immer für einen Punct E, und zieht die geraden AE und BE, so wird die Summe dieser Geraden kleiner seyn, als die der sie einschließenden Geraden AC und BC. Denn wenn man durch den Punct E die Gerade GF zieht, welche zu gleicher Zeit die beyden andern Geraden AC und BC schneidet, so wird man haben

$$GF < GC + CF;$$

hieraus folgt, daß der Umfang AGFB kleiner seyn wird,

als die Summe der Geraden AC und CB. Aus eben derselben Ursache ist

$$AE < AG + GE, \quad EB < EF + FB;$$

also

$$AE + EB < AG + GE + EF + FB,$$

oder kleiner als der Umfang AGEB, und folglich um desto mehr kleiner als die Summe der Geraden AC und BC.

In einem Dreyecke unterscheidet man sechs Stücke, nehmlich drey Seiten und drey Winkel. Diese stehen in einem nothwendigen Zusammenhange, welcher in den folgenden Sätzen gezeigt werden soll.

§. 16. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten des einen zweien Seiten des andern stückweise gleich sind, und der von diesen beyden Seiten eingeschlossene Winkel in dem einen Dreyecke, dem von den gleichen Seiten im andern Dreyecke eingeschlossenen gleich ist, so sind sie auch in allen übrigen Stücken einander gleich.

Wenn der Winkel C des Dreyecks ABC Fig. 9. dem Winkel C′ des Dreyecks A′B′C′ gleich ist, und die Seiten AC und BC, welche den ersten dieser Winkel einschließen, respectiv den Seiten A′C′ und B′C′ gleich sind, welche den letztern einschließen: so ist das Dreyeck ABC dem Dreyeck A′B′C′ in allen übrigen Theilen gleich; das heißt, der Winkel A ist gleich dem Winkel A′, der Winkel B dem Winkel B′ und die Seite AB der Seite A′B′.

Beweis.

Wenn man das Dreyeck A′B′C′ dergestalt auf ABC trägt, daß der Punct C′ auf C und die Seite A′C′ auf AC zu liegen kommt, so muß der Punct A′ auf den Punct A fallen, weil A′C′ = AC; da ferner nach der Voraussetzung die Winkel ACB und A′C′B′ einander gleich sind, so müssen sie einander genau decken, und die Seite C′B′ wird folglich auf CB fallen; endlich wird der Punct B′ auf den Punct B fallen, weil CB = C′B′. Da nun die äußersten Puncte der Geraden A′B′ auf den der Geraden AB liegen, so wird sie mit dieser letztern zusammenfallen; das Dreyeck A′C′B′ wird demnach ACB decken, und ihm also völlig gleich seyn.

Es ist wichtig zu merken, daß die gleichen Seiten, oder diejenigen, welche sich decken, wenn beyde Figuren auf einander gelegt werden, in jedem der Dreyecke den gleichen Winkeln gegenüber stehen; so steht A′B′, welche mit AB zusammenfällt, dem Winkel A′ gegenüber, welcher dem Winkel A gleich ist. Eben so verhält es sich bey den folgenden Sätzen.

§. 17. Zusatz.

Ein Dreyeck ist durch einen seiner Winkel, und durch die diesen Winkel einschließenden Seiten völlig bestimmt, weil, wenn zwey Dreyecke in diesen Stücken einander gleich sind, sie es auch in allen übrigen sind. Man kann sich ferner von dieser Wahrheit überzeugen, wenn man in Erwägung zieht, daß wenn der Winkel C gegeben ist, es auch die gegenseitige Lage der Seiten AC und CB ist; und wenn man ferner ihre Länge hat, welche

die Puncte A und B bestimmt, so kann man diese Puncte nur durch eine einzige Gerade AB verbinden, und man erhält folglich nur das einzige Dreyeck ABC.

§. 18. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken, eine Seite des einen, einer Seite des andern gleich ist, und die an dieser Seite liegenden Winkel in dem einen Dreyeck den an der gleichen Seiten liegenden Winkeln im andern Dreyecke stückweise gleich sind, so sind diese Dreyecke völlig einander gleich.

Wenn die Seite AB des Dreyecks ABC der Seite A′B′ des Dreyecks A′B′C′ gleich ist, und die Winkel CAB und CBA des erstern ordnungsweise den Winkeln C′A′B′ und C′B′A′ des zweyten gleich sind, so sind diese Dreyecke völlig einander gleich.

Beweis.

Um die Wahrheit dieses Satzes einzusehen, denke man sich das Dreyeck A′B′C′ dergestalt auf dem Dreyeck ABC gelegt, daß die Seite A′B′ auf die ihr gleiche AB, der Punct A′ auf den Punct A, und B′ auf B zu liegen komme. Aus der Gleichheit der Winkel CAB und C′A′B′ folgt, daß die Seite A′C′ in die Richtung der Seite AC fallen müsse; da ferner die Winkel CBA und C′B′A′ gleich sind, so wird die Seite C′B′ in die Richtung der ihr gleichen CB fallen, und der den beyden Linien C′A′ und C′B′ gemeinschaftliche Punct C′ wird auf dem den beyden Linien CA und CB gemeinschaftlichen Punct C liegen; die beyden Dreyecke werden mithin einander völlig decken, und folglich in allen ihren Theilen einander gleich seyn.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn die Seiten ab und bc des Dreyecks abc Fig. 10. ordnungsweise der Seiten AB und BC des Dreyecks ABC gleich sind, und der von den beyden ersten eingeschlossene Winkel b kleiner ist als der von den beyden letztern eingeschlossene Winkel B, so ist die dem Winkel b im Dreyecke abc gegenüberstehende Seite ac kleiner, als die dem Winkel B im Dreyeck ABC gegenüberstehende AC.

Beweis.

Wenn man das Dreyeck abc dergestalt auf ABC legt, daß die Linie ab auf AB zu liegen kommt, so kann der Punct c nur eine von den in numero 1, 2 und 3, durch C′ ausgedrückten Lagen annehmen.

Aus der ersten, in welcher er auf AC fällt, ist offenbar, daß AC′, welche ac ausdrückt, kleiner als AC ist.

Aus der zweyten, nach welcher der Punct C′ innerhalb des Dreyecks ABC fällt, würde man haben

$$AC' + BC' < AC + BC \text{ (§. 15.)},$$

woraus ferner folgt

$$AC' \text{ oder } ac < AC,$$

weil nach der Voraussetzung BC′, welche bc ausdrückt, der BC gleich ist.

Da endlich bey der dritten Lage der Punct C′ gänzlich außerhalb des Dreyecks ABC liegt, so würde man haben

$$AC' < OC' + OA, \quad BC < OC + OB,$$

woraus man schließen kann

$$AC' + BC < OC' + OA + OC + OB,$$

welches

welches zuvörderst auf

$$AC' + BC < AC + BC'$$

zurückkommt, weil $OC + OB = BC'$, $OA + OC = AC$; und zieht man von beyden Theilen die gleichen Linien BC und BC' ab, so wird noch immer bleiben

$$AC' \text{ oder } ac < AC.$$

§. 20. Zusatz.

Hieraus folgt, daß wenn die drey Seiten eines Dreyecks, den dreyen Seiten eines andern stückweise gleich sind, es auch diese beyden Dreyecke in allen übrigen Theilen seyn müssen; denn wenn die Seiten AB, AC, BC des Dreyecks ABC Fig. 9. den Seiten A'B', A'C', B'C' des Dreyecks A'B'C' respectiv gleich sind, so wird der von irgend zweyen Seiten im ersten Dreyeck eingeschlossene Winkel, dem von den gleichen Seiten im andern Dreyecke eingeschlossenen Winkel gleich seyn. Denn wenn z. B. einer der Winkel B und B' kleiner als der andre wäre, so mußte auch nach dem vorhergehenden §. eine der Seiten AC und A'C' kleiner als die andre seyn, welches gegen die Voraussetzung ist. Es sind daher in den Dreyecken ABC und A'B'C' zu gleicher Zeit sowohl die Seiten als die Winkel stückweise einander gleich, und es sind es folglich auch diese Dreyecke selbst.

§. 21. Aufgabe.

Die drey Seiten eines Dreyecks sind gegeben; man soll daraus das Dreyeck beschreiben.

Auflösung.

Es seyen M, N, P, Fig. 11. die drey gegebenen Linien. Nachdem man die erste genommen hat, um dar-

aus die Seite AB zu bilden, beschreibe man aus dem Puncte A, als aus einem Mittelpuncte, mit einem der zweyten Linie N gleichen Halbmesser, ein Kreis CDC′; und hiernächst aus dem Punct B, als aus einem Mittelpuncte mit einem der dritten Linie P gleichen Halbmesser, einen andern Kreis CEC′. Ihre Umkreise werden sich in zweyen Puncten schneiden, von denen der eine ober- und der andre unterhalb der Linie AB liegt. Verbindet man nun jeden dieser Puncte mit den äußersten Puncten der Linie AB, so wird man dadurch zwey Dreyecke bilden, welche der Aufgabe ein Genüge thun werden, weil ihre drey Seiten respectiv den drey gegebenen Linien gleich sind.

§. 22. Anmerkung.

Nähme man die drey Linien nach Belieben, so könnte es sich zutragen, daß die Umkreise beyder Zirkel einander nicht schnitten. Dieser Umstand würde eintreten, 1) wenn P + N kleiner als M wäre. Denn es ist einleuchtend, und wir werden es auch weiter unten beweisen, daß zwey Kreise sich nur dann schneiden können, wenn der Abstand ihrer Mittelpuncte kleiner als die Summe ihrer Halbmesser ist; 2) in dem Falle, wo der eine dieser Kreise den andern völlig einschließt, d. h. wo man haben würde

$$AD > AB + BF \text{ oder } N > M + P.$$

Diese beyden Fälle sind in der allgemeinen Bedingung begriffen, daß die Summe irgend zweyer Seiten eines Dreyecks immer größer als die dritte seyn muß, und welche man vereinfachen kann, wenn man sie folgen-

dermaßen vorträgt: die Summe der beyden kleinsten Seiten eines Dreyecks ist immer größer als die dritte. In der That leistet die Bedingung $N + P > M$ ein Genüge, weil sodann auch die Bedingungen $N + M > P$ und $P + M > N$ statt finden.

Die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, welche uns in den Stand setzt, ein Dreyeck zu construiren, welches einem gegebenen gleich ist, wenn man sich der Seiten dieses letztern bedient, biethet uns auch ein Mittel dar, einen Winkel einem andern gleich zu machen.

§. 23. Aufgabe.

Durch einen auf einer Linie gegebenen Punct einen Winkel zu legen, welcher einem gegebenen Winkel gleich sey.

Auflösung.

Es seyen Fig. 12. CAB der gegebene Winkel, A'B' die gerade Linie, auf welcher man den neuen Winkel, der seinen Scheitel in A' haben soll, construiren will. Man nehme zuvörderst auf den Seiten des ersten vom Puncte A aus zwey einander gleiche Entfernungen AB und AC, und verbinde ihre Endpuncte B und C durch eine gerade Linie. Trägt man dann von A' in B' die Linie AB, so hat man nur noch nöthig, auf der Linie A'B' ein Dreyeck zu beschreiben, dessen beyden Seiten A'C' und B'C' respectiv den Seiten AC und BC gleich sind, welches geschieht, wenn man einen der Durchschnittspuncte C' merkt, welche die aus den Puncten A' und B', als aus Mittelpuncten, mit den Halbmessern AC und BC beschriebenen Kreise bilden. Zieht man dann A'C', so

wird der Winkel C′A′B′ dem Winkel CAB gleich seyn, weil (§. 21.) die Dreyecke CAB und C′A′B′ vermöge der Construction einander gleich sind.

§. 24. Aufgabe.

Man soll einem gegebenen Dreyecke ein ihm gleiches bilden; und zwar soll zur Construction dieses letztern nur ein Winkel nebst den beyden diesen Winkel einschließenden Seiten des ersten gebraucht werden.

Auflösung.

Wenn dieser Winkel und diese Seiten, der Winkel C und die geraden Linien AC und BC des Dreyecks ABC Fig. 9. sind, so lege man an die Gerade A′C′ einen Winkel C′, welcher C gleich ist; man trage dann auf seine Seiten A′C′ und C′B′ vom Punct C′ aus, die Entfernungen AC und BC, welche die Puncte A′ und B′ bestimmen werden; verbindet man dann diese Puncte durch eine gerade Linie, so wird man nach §. 16. das dem Dreyecke ABC gleiche Dreyeck A′B′C′ haben.

§. 25. Aufgabe.

Ein Dreyeck ist gegeben; man soll ein ihm gleiches construiren, indem man zur Construktion des letztern nur eine Seite und die beyden anliegenden Winkel des erstern braucht.

Auflösung.

Wenn AB diese Seite, A und B die anliegenden Winkel sind, so nehme man auf der Geraden A′B′ einen Theil A′B′ = AB; man setze sodann an die äußersten Puncte von A′B′ die Winkel A′ und B′, respectiv den Winkeln A und B gleich. Da man auf diese Art die

Richtung der Geraden A′C′ und B′C′ hat, so erhält man, wenn sie so weit verlängert werden, bis sie sich im Puncte C′ schneiden, das Dreyeck A′B′C′, welches nach §. 18. dem Dreyecke ABC gleich ist.

Von den senkrechten und schiefen Linien.

§. 26. Lehrsatz.

Wenn von was für einem Puncte C, der auf AB senkrechten Geraden CD Fig. 13. die Linien AC und CB gezogen werden, und die Entfernungen dieser letzten vom Puncte D, d. h. von dem Puncte, in welchem die senkrechte mit der Linie AB zusammenstößt, einander gleich sind, so sind es auch diese Linien selbst; im Gegentheile ist diejenige größer, welche von diesem Puncte weiter entfernt ist.

Beweis.

Da nach der Voraussetzung die Entfernungen AD und DB einander gleich sind, da ferner, nach der Natur der Senkrechten, die Winkel CDA und CDB einander gleich sind (§. 9.), und da endlich die Linie CD den beyden Dreyecken ACD und CDB gemein ist: so folgt, daß diese Dreyecke zwey Seiten, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel einander gleich haben, und folglich gleich sind (§. 16.). Es ist daher BC = AC; mithin sind die Linien AC und BC, welche von der senkrechten CD gleichen Abstand haben, einander gleich.

Zieht man durch den Punct C die Gerade CE, welche von der senkrechten CD eine größere Entfernung als CA hat, so erhält man, wenn man CD unterhalb

AB um eine Größe C′D = CD verlängert, und die Geraden AC′ und C′E zieht,

$$CE + C'E > CA + C'A \text{ (§. 15.).}$$

Nun sind die Dreyecke CAD und C′AD nach §. 16. einander gleich, weil nach der Voraussetzung die Winkel ADC und ADC′, so wie die Seiten CD und CD′ einander gleich, und die Seite AD diesen beyden Dreyecken gemein ist; man wird demnach haben

$$AC = AC'.$$

Man kann auf eben die Art beweisen, daß $CE = CE'$, woraus folgt

$$2CE > 2CA \text{ oder } CE > CA,$$

woraus sich ergiebt, daß die von der senkrechten am weitesten entfernte Linie, auch die größte Länge hat.

§. 27. Erster Zusatz.

Die Linien AC, CB, CE heißen in Hinsicht der Linie AB, schiefe Linien; und aus dem Vorhergehenden folgt, daß die schiefen Linien, welche von der senkrechten gleich weit abstehen, einander gleich sind; und daß diejenigen, welche sich von ihr am weitsten entfernen, die größten sind. Hieraus fließt offenbar, daß zwey einander gleiche schiefe Linien, nicht von einer und derselben Seite der senkrechten fallen können, sondern daß sie auf jeder Seite derselben von dem Puncte, worin die eine Senkrechte die andre trift, gleich weit abstehen müssen.

§. 28. Zweyter Zusatz.

Hieraus folgt 1) daß die senkrechte die kürzeste von allen Linien ist, welche man vom Puncte C nach der ge-

raden Linie AB ziehen kann, und daß sie folglich das natürlichste Maaß der Entfernung dieses Punctes von dieser Linie ist.

2) Daß alle Puncte derselben von den Puncten A und B eine gleiche Entfernung haben; denn wenn man in ihrer Richtung irgend einen beliebigen Punct F annimmt, so wird man auch haben

$$AF = FB.$$

3) Daß ein jeder außerhalb der senkrechten genommene Punct G von den Puncten A und B ungleich entfernt ist; denn man hat

$$BG < BF + FG,$$

woraus folgt

$$BG < AG,$$

weil

$$BF = AF \text{ und } AG = AF + FG.$$

4) Endlich, daß man von einem Puncte aus keine drey gleiche Linien nach einer geraden Linie ziehen kann.

§. 29. Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie AB Fig. 14. eine senkrechte Linie zu setzen, welche sie in zwey gleiche Theile theilen soll.

Auflösung.

Aus den Puncten A und B beschreibe man successiv als aus zweyen Mittelpuncten mit einer und derselben Oeffnung des Zirkels, die größer als die Hälfte von AB seyn muß, zwey Kreisbogen CE und CF, welche sich in einem Puncte C schneiden *). Man beobachte dann daß-

*) Um die Figur zu vereinfachen, sind hier nicht, wie in

selbe Verfahren unterhalb AB; verbindet man dann die Puncte C und C′, so wird die gerade CC′ die verlangte senkrechte seyn. Denn die Dreyecke CBC′ und CAC′ sind (§. 20.) einander gleich, weil alle drey Seiten derselben einander gleich sind, indem AC = CB, AC′ = C′B und CC′ beyden Dreyecken gemein ist; mithin sind die Winkel ACD und DCB einander gleich. Da nun die diese Winkel in den Dreyecken ACD und DCB einschliessenden Seiten AC und CD, CB und CD ebenfalls gleich sind, so sind auch (§. 16.) diese letztern Dreyecke einander gleich; die Winkel ADC und CDB werden daher ebenfalls einander gleich, und folglich rechte seyn. Da ferner AD = BD, so ist der Punct D die Mitte von AB.

§. 30. Aufgabe.

Von einem auf der geraden Linie AB Fig. 15. genommenen Puncte D auf dieselbe eine senkrechte Linie zu errichten.

Auflösung.

Es sey D der Punct der Linie AB, durch welchen man die senkrechte führen will; man nehme von beyden Seiten dieses Punctes die gleichen Entfernungen AD und BD, und beschreibe aus den Puncten A und B mit gleichen Halbmessern, die beyden Kreisbogen CE und CF, welche sich im Puncte C schneiden; verbindet man nun diesen Punct mit dem Puncte D, so wird die Linie

---

Fig. 11. die ganzen Kreise gezogen worden; sondern nur die den gesuchten Durchschnittspuncten zunächst liegenden Stücke. Dieses Verfahren soll in der Folge immer beobachtet werden.

CD auf AB senkrecht seyn. Denn da AC und CB, so wie die Theile AD und DB einander gleich sind, und die Dreyecke ACD und BBD überdies die Seite CD gemein haben, so sind sie gleich, und folglich ADC = CDB.

§. 31. Aufgabe.

Von einem außerhalb der geraden AB Fig. 16. gegebenen Puncte C, auf dieselbe eine senkrechte zu fällen.

Auflösung.

Aus dem Puncte C, als aus einem Mittelpunct, beschreibe man mit einem Halbmesser, welcher größer ist, als die kleinste Entfernung des Punctes C von der geraden AB, einen Kreisbogen, welcher die gerade AB in zweyen Puncten A und B schneiden wird; man beschreibe dann mit demselben Halbmesser zwey Kreisbogen, welche, indem sie sich in C′ schneiden, einen neuen Punct der verlangten senkrechten CC′ bestimmen. Denn, da nach der Construktion die Puncte A und B vom Puncte C so wie vom Puncte C′ gleiche Entfernung haben, so läßt sich wie im §. 29. beweisen, daß die Winkel ADC und BDC rechte sind.

§. 32. Lehrsatz.

Von einem außerhalb einer geraden Linie AB genommenen Puncte C, kann man nur eine einzige senkrechte CD auf dieselbe herablassen.

Beweis.

Da die schiefen Linien AC und BC einander gleich sind, so müssen sie von der senkrechten gleiche Entfernung haben; diese muß demnach durch den Punct D, als der

Mitte von AB, gehen, und durch die Puncte C und D kann nur eine einzige gerade Linie gelegt werden.

Da nun dasselbe bey allen auf der gegebenen Linie genommenen Puncten der Fall ist, so ist der Satz an und für sich klar (§. 9.).

§. 33. Erster Zusatz.

Hieraus folgt, daß zwey gerade Linien, DE und FG, welche auf einer und derselben dritten AB Fig. 17. senkrecht sind, nie einander schneiden können, so weit man sie auch ober- oder unterhalb der Linie AB verlängern mag; denn wenn sie einander schnitten, so könnte man von dem Durchschnittspunkte zwey senkrechte auf die geraden AB fällen, welches unmöglich ist.

§. 34. Zweyter Zusatz.

Es folgt ferner aus eben demselben Satze: 1) daß zwey Dreyecke ABC, A′B′C′ Fig. 18., von denen das eine in A und das andre in A′ einen rechten Winkel hat, einander gleich sind, wenn die diesen Winkeln respectiv gegenüberstehenden Seiten BC und B′C′, so wie einer ihrer andern Winkel, B und B′ zum Beyspiel, einander gleich sind.

Denn wenn man das Dreyeck A′B′C′ dergestalt auf ABC legt, daß der Winkel B′ auf den Winkel B zu liegen kommt, so wird die Seite B′C′ die ihr correspondirende BC genau decken; wenn nun die Seite A′C′, deren äußerster Punct C′ auf dem Puncte C liegt, nicht genau auf AC fiele, so würde hieraus folgen, daß man vom Puncte C′ auf AB, welche in Ansehung ihrer Richtung mit A′B′ zusammenfällt, zwey senkrechte Linien herabgelassen habe.

2) Die Gleichheit dieser Dreyecke findet auch dann noch statt, wenn die Seiten AC und BC respectiv den Seiten A′C′ und B′C′ gleich sind; dann legt man diese Dreyecke dergestalt aufeinanander, daß A′C′ auf AC zu liegen kommt, so wird auch, da die Winkel BAC und B′A′C als rechte Winkel einander gleich sind, die Seite A′B′ auf AB fallen; da nun alsdann die Seiten AC und B′C′ gleiche schiefe Linien sind, die von einer und derselben Seite der senkrechten AC fallen, so müssen sie von derselben gleich weit abstehen, und folglich auf einander fallen.

§. 35. Anmerkung.

Der erste der oben in Rücksicht der Dreyecke, welche einen rechten Winkel haben, bewiesenen Fälle der Gleichheit, findet bey allen Dreyecken statt, welche einander gleich sind, sobald zwey Winkel derselben, und eine einem nehmlichen Winkel in beyden Dreyecken gegenüber liegende Seite einander gleich sind; allein dieser Fall ist für das Folgende nicht nothwendig, und er folgt überdies aus einem weiter unten (§. 51.) bewiesenen Satze.

Dieses findet aber nicht beym zweyten statt. Wenn man in den Dreyecken ABC und A′B′C′ Fig. 19. $A = A'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ hat, so kann man, wenn der Winkel A spitz ist, und AC die CB übertrift, nicht auf die Gleichheit dieser Dreyecke schließen; denn wenn man im Dreyecke A′B′C′ die senkrechte C′D′ herabfällt, so wird man von beyden Seiten dieser senkrechten zwey einander gleiche schiefe Linien CB und C′B′ finden. Die Dreyecke C′A′B′ und C′A′B″, denen der Winkel A′ und die Seite A′C′ gemein ist, werden also

den gegebenen Bedingungen ein Genüge thun; allein es kann nur eins derselben dem Dreyecke ABC gleich seyn, nehmlich dasjenige, in welchem der Winkel B′ von eben der Art wie der Winkel B ist, nehmlich im gegenwärtigen Falle spitz. Es ist übrigens offenbar, daß der Winkel C′B″A′ stumpf ist, weil er mit dem Winkel C′B″B′ = C′B′B″ an einer und derselben geraden Linie liegt.

§. 36. Lehrsatz.

Wenn zwey Seiten eines Dreyecks einander gleich sind, so sind die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel ebenfalls einander gleich; und wenn die Seiten ungleich sind, so steht die größere dieser beyden dem größern Winkel gegenüber.

Beweis.

Wenn im Dreyecke ABC Fig. 20. die Seiten AB und BC einander gleich sind, so wird die vom Puncte D auf die Seite AC herabgelassene senkrechte, durch die Mitte D dieser Seite gehen (§. 32.), und folglich das Dreyeck ABC in zwey andere theilen, welche (§. 16.) einander gleich seyn werden, weil der rechte Winkel ADB des einen von den Seiten AD und BD eingeschlossen ist, welche respectiv den Seiten DC und BD gleich sind, welche den rechten Winkel BDC des andern einschließen. Mithin wird der Winkel A dem Winkel C gleich seyn.

In Ansehung des Dreyecks ACE, in welchem die Seiten AE und EC ungleich sind, ist klar, daß der Punkt, in welchem sich diese beyden Geraden schneiden, außerhalb der aus der Mitte von AC errichteten senkrechten BD fallen muß (§. 28.); und wenn man BC

zieht, so wird man das Dreyeck ABC bilden, dessen Winkel BCA und BAC einander gleich sind, weil es die gegenüber stehenden Seiten AB und BC als schiefe Linien sind, welche von der senkrechten gleich weit abstehen; da aber der Winkel BCA innerhalb des Winkels ECA liegt, so folgt, daß dieser letztere, welcher der Seite AE gegenüber liegt, den der kleinern Seite EC gegenüberstehenden Winkel EAC übertrift.

§. 37. Zusatz.

Hieraus folgt, daß wenn zwey Winkel eines Dreyecks einander gleich sind, es auch die diesen Winkel gegenüber stehenden Seiten seyn müssen; denn wären sie ungleich, so müßte der der größere Seite gegenüber stehende Winkel größer als der andre seyn, welches wieder die Voraussetzung ist.

Dieselben Schlüsse beweisen auch, daß, wenn zwey Winkel einander ungleich sind, die größere von beyden Seiten diejenige ist, welche dem größern der beyden Winkel gegenüber liegt; weil die Ungleichheit der Winkel die der Seiten mit sich führt, und weil, wenn zwey Seiten einander ungleich sind, der der größern Seite entgegenstehende Winkel immer der größere ist.

Wenn endlich die drey Seiten eines Dreyecks einander gleich sind, so sind es auch die drey Winkel, und umgekehrt.

§. 38.

Die Dreyecke, in welchen die drey Seiten ungleich sind, werden ungleichseitige genannt; die, in welchen zwey Seiten einander gleich sind, heißen gleichschenk-

lichte, und die, in denen alle drey Seiten einander gleich sind, werden gleichseitige genannt.

Theorie der Parallelen.

§. 39.

Zwey gerade Linien, welche, ob sie gleich in einer und derselben Ebne liegen, dennoch einander nie begegnen, so weit man sie auch von beyden Seiten verlängern mag, werden **Parallellinien** genannt.

Zwey gerade Linien DE und FG Fig. 17., welche auf einer und derselben dritten AB senkrecht stehen, sind also einander parallel (§. 33.).

§. 40. Anmerkungen.

Alle diejenigen, welche nur von der geraden Linie einen Begriff haben, werden mir ohne Schwierigkeit einräumen, 1) daß, wenn man durch den Punct D Fig. 21. eine gerade HH′ zieht, welche mit der Linie DB einen Winkel HDB macht, der kleiner als der rechte EDB ist, oder welche gegen den Theil FG der Geraden GG′ geneigt ist, sie auch diese letztere oberhalb AB schneiden muß, wenn beyde genugsam verlängert werden; 2) wenn man durch eben denselben Punct D die Gerade II′ führt, welche mit DB den Winkel IDB bildet, der grösser als der rechte EDB ist, so wird sie, da sie unterhalb AB den Winkel I′DB bildet, der kleiner als der rechte E′DB ist, gegen den Theil FG′ der Geraden GG′ geneigt seyn, und folglich diese Linie unterhalb AB genugsam verlängert schneiden.

Hieraus folgt, daß eine auf einer andern senkrecht

stehende Linie, von allen denen geschnitten wird, welche auf diese andre schief fallen, und daß nur diejenigen Linien in einer Ebne einander nicht schneiden, oder parallel seyn können, welche zu gleicher Zeit auf einer und derselben dritten senkrecht seyn können *).

---

*) Die ganze Unvollkommenheit, welche in der Theorie der Parallelen herrscht, rührt bloß von der Schwierigkeit her, diesen Satz unmittelbar zu beweisen. Viele Schriftsteller haben, um hierin zum Zwecke zu gelangen, unnütze Mühe verschwendet; andre, wie Bezout, haben die fehlerhaften Schlüsse zu vermänteln gesucht, welches mir wieder die strenge Pflicht zu seyn scheint, die sich jeder Verfasser der Elementarbücher aufzulegen hat, nehmlich nur immer richtige Begriffe fest zu setzen, und besonders ihren Ursprung sorgfältig zu zeigen. Ich habe es daher für dienlicher erachtet, die vorhergehende Bemerkung als ein Axiom anzuführen, auf welchem die ganze Theorie der Parallelen beruht, welches mir evident genug scheint, um unter den Rang der ersten, unmittelbar aus der Vernunft erhaltenen Begriffe gezählt werden zu können.

Dessen ungeachtet glaube ich, daß der folgende Beweis vom Bürger Bertrand, denen angenehm seyn wird, welche durchaus Beweise haben wollen; er ist der einfachste und sinnreichste von allen die ich kenne.

Es ist zuvörderst klar, daß wenn man einen beliebigen Winkel edh eine hinreichende Anzahl Mahl zu sich selbst hinzusetzt, wie Fig. 22. in hdh′, h′dh″, h″dh‴, h‴dh⁗ zeigt, immer hierdurch ein ganzer Winkel edh⁗ gebildet werden kann, welcher größer als der rechte Winkel edb ist; wenn man aber auf die Gerade DB die senkrechten DE und FG errichtet, und sie unbegränzt verlängert, so wird man den unbegränzten Streifen EDFG erhalten, welcher den rechten Winkel nicht ausfüllen kann, so oft man ihn auch zu sich selbst hinzusetzen mag. In der That wird, wenn man FK = DF

§. 41. Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden fließt offenbar, daß zwey gerade auf zweyen andern sich schneidenden respectiv senkrechte Linien sich nothwendigerweise schneiden müssen. Wenn z. B. die Linie FG Fig. 21 * auf BC senkrecht ist, so steht sie auf AB schief, weil, wenn das Gegentheil Statt fände, BC und AB zwey zu gleicher Zeit, durch den Punct B auf FG geführte senkrechte wären, welches nach §. 32. nicht geschehen kann; da also FG auf AB schief fällt, so muß sie die auf dieser Linie senkrechte DE schneiden.

§. 42. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien DE und FG Fig. 23. auf einer

---

nimmt, KL auf AB senkrecht zieht, und dann die Figur längs der Linie FG herum drehet, der Streifen EDFG den Streifen GFKL genau decken; denn da die Winkel CFD, GFK rechte sind, so wird der Theil DF auf FK fallen; und da nach der Construction DF = FK, so muß der Punct D auf den Punkt K fallen; da ferner der Winkel FKL eben so wie EDF ein rechter ist, so muß DE auf KK fallen. Dieses vorausgesetzt, wird man, da auf der unbegränzten DB so viele der DF gleiche, als man will, genommen werden können, ohne je zu Ende zu kommen, eine eben so große Anzahl dem EDFG gleiche Streifen nehmen können, ohne je den zwischen den Seiten des rechten Winkels EDB enthaltenen Raum decken zu können. Hieraus folgt, daß in Rücksicht der Seitengränzen, die Fläche des Winkels edh größer seyn muß als die des Streifens EDFG. Wenn man daher in diesem Streifen einen Winkel EDH dem edh gleich construirt, so kann er nicht zwischen den Linien ED und FG begriffen bleiben; seine Seite DH muß also nothwendigerweise die Gerade FG schneiden.

einer und derselben geraden AB senkrecht sind, so sind alle Gerade, welche wie LM auf einer derselben senkrecht sind, auch zugleich auf der andern senkrecht.

Beweis.

Wir wollen annehmen, daß dieses nicht der Fall sey, und daß die in M auf FG senkrechte LM es nicht in L auf DE sey; so könnte man vom Puncte L auf LM eine senkrechte errichten, welche von EL verschieden wäre, und gegen welche EL entweder innerhalb oder außerhalb in Rücksicht auf FG fiele. Nach dem Satze im §. 40. müßte also EL die GM begegnen, welches nicht geschehen kann, weil die auf einer und derselben AB senkrechten Geraden DE und FG sich nie schneiden können; man kann also vom Puncte L auf LM keine von EL verschiedene senkrechte errichten, und es ist daher LM zugleich auf DE und auf FG senkrecht.

§. 43. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß zwey zu einer und derselben dritten paralelle Linien es auch zu einander sind. Denn da eine auf dieser dritten senkrechte Linie es auch auf den beyden übrigen ist, so werden diese, da sie auf einer und derselben dritten senkrecht stehen, einander nie schneiden, und folglich zu einander parallel seyn.

§. 44. Lehrsatz.

Wenn zwey zu einander paralelle Linien DE und FG Fig. 24. durch irgend eine Gerade IH geschnitten werden, so ist der äußere Winkel GMI dem ihm auf der-

selben Seite von IH gegenüberstehenden innern Winkel ELI gleich.

Beweis.

Wenn man von der Mitte K der Linie LM auf eine der Geraden DE, FG die senkrechte DF fällt, so wird sie zugleich auf der andern senkrecht seyn (§. 42.). Die Dreyecke DLK, KFM werden einander gleich seyn (§. 34.), weil die den rechten Winkeln D und F respectiv gegenüber liegenden Seiten nach der Construction einander gleich sind, und weil es auch die Winkel DKL und MKF als Scheitelwinkel sind. Es ist daher der Winkel DLK oder ELI dem Winkel KMF, und folglich dem GMI als Scheitelwinkel dieses letztern gleich.

§. 45. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien DE und FG von einer dritten IH geschnitten werden, und der äußere Winkel GMI dem ihm auf derselben Seite von IH gegenüberstehenden innern ELI gleich ist, so sind diese gerade Linien zu einander paralell.

Beweis.

Wenn man vom Puncte K als der Mitt von LM auf DE die senkrechte DF fällt, so bildet man die einander gleichen Dreyecke DLK und MKF, weil nach der Annahme der Winkel DLK oder ELI dem Winkel KMF als dem Scheitelwinkel von GMI, und die Winkel DKL und MKF ebenfalls als Scheitelwinkel einander gleich sind; und endlich nach der Consiruction LK gleich KM ist. Es muß daher auch der Winkel KFM dem LDK gleich, und folglich ein rechter seyn. Da nun die beyden

Linien DE und FG auf einer und derselben Geraden DF senkrecht stehen, so müssen sie paralell seyn.

§. 46. Anmerkung.

Der häufige Gebrauch, welchen man von den Eigenschaften der Paralellinien macht, hat die Geometer bewogen, die verschiedenen Winkel, welche sie mit den Geraden sie schneidenden Linien bilden, mit besondern Nahmen zu belegen. Die schneidenden Linien heißen **Secanten.**

Die Winkel, welche wie ELI, GMI Fig. 25. auf einerley Seite der Secante IH liegen, und deren Oeffnung nach einerley Seite gerichtet ist, heißen **correspondirende Winkel.**

Die Winkel DLM, FMI sind ebenfalls correspondirende Winkel.

Alle Winkel, deren Oeffnung zwischen gen Paralellen liegt, sind in der Benennung der **innern Winkel** begriffen, und alle Winkel, deren Oeffnung außerhalb liegt, heißen **äußere Winkel.**

Endlich unterscheidet man dieselben Winkel nach ihrer Lage gegen die Secante. Diejenigen, welche von einerley Seite dieser Geraden liegen, heißen **innere oder äußere von einerley Seite liegende Winkel.**

ELM, GML sind innere von einerley Seite liegende Winkel.

HLD, IMF sind äußere von einerlerley Seite liegende Winkel.

Die Winkel, welche sowohl in Rücksicht der Secante als der Paralellen eine entgegengesetzte Lage haben, heißen **Wechselwinkel.** Es giebt innere Wechselwin-

kel, wie ELM und FML, oder DLM und GML; und äußere Wechselwinkel, wie HLD und GMI, oder HLE und FMI.

§. 47. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien DE und FG von einer dritten geschnitten werden, so sind

1) die correspondirenden Winkel gleich,

2) die innern Wechselwinkel gleich,

3) sind die äußern Wechselwinkel gleich,

4) betragen die innern von einerley Seite liegenden Winkel zusammen genommen zwey rechte,

5) betragen die äußern von einerley Seite liegenden Winkel zusammen genommen zwey rechte,

6) Wenn eine von diesen Eigenschaften statt findet, so müssen die geraden DE und FG nothwendigerweise paralell seyn.

Beweis.

1) Die Gleichheit der correspondirenden Winkel ist nichts anders als der Lehrsatz im §. 44., weil die Winkel ELI und GMI Fig. 24. nothwendigerweise correspondirende Winkel sind, wie aus dem diesem Worte beygelegten Sinne folgt. Ist aber einmahl die Geichheit dieser beyden bewiesen, so läßt sich die aller übrigen correspondirenden Winkel daraus herleiten. Für die Winkel DLM und FMI Fig. 25. merke man, daß die Summe der Winkel DLM und ELI, welche auf einer und derselben Geraden DE ruhen, zwey rechten gleich ist (§. 11.); daß aus eben demselben Grunde die Summe der Winkel FMI und GMI ebenfalls zwey rechte beträgt. Zieht

man von diesen gleichen Summen die gleichen Winkel ELI und GMI ab, so werden die übrig bleibenden Winkel DLM und FMI nothwendigerweise gleich seyn.

2) Die Gleichheit der innern Wechselwinkel, z. B. die der Winkel ELI, FMH, muß statt finden, weil FMH und GMI als Scheitelwinkel einander gleich, und weil dieser letztere auch dem ELI als seinem correspondirenden gleich ist; da nun die beyden Winkel ELI und FMH einem und demselben dritten GMI gleich sind, so sind sie auch einander gleich. Auf eine ähnliche Art läßt sich die Gleichheit der Winkel DLI und GMH darthun.

3) Die Gleichheit der äußern Wechselwinkel, z. B. die der Winkel DLH und GMI findet statt, weil GMI dem FMH als Scheitelwinkel, und dieser letztere dem DLH als correspondirendem Winkel gleich ist; da nun die beyden Winkel DLH, GMI einem und demselben dritten FMH gleich sind, so müssen sie auch unter einander gleich seyn. Auf dieselbe Art kann man auch die Gleichheit der beyden Winkel ELH, FMI beweisen.

4) Die innern von einerley Seite liegenden Winkel, z. B. ELI und GMH, betragen zusammen genommen zwey rechte, weil ELI und GMI als correspondirende Winkel gleich sind, und weil die Summe der Winkel GMI und GMH, als die zweyer Nebenwinkel, zwey rechte beträgt (§. 11.); setzt man nun für GMI den ihm gleichen ELI, so wird die Summe der Winkel ELI und GMH, mit der der Winkel GMI und GMH einerley seyn, und folglich zwey rechte betragen.

5) Die äußern von einerley Seite liegenden

Winkel, z. B. ELH und GMI, betragen zusammen genommen zwey rechte, weil die Winkel GMI und ELM als correspondirende Winkel gleich sind, und weil die Summe der Winkel ELM und ELH, als die zweyer Nebenwinkel, zwey rechte beträgt (§. 11.); substituirt man statt des Winkels ELM den ihm gleichen GMI, so wird die Summe der Winkel GMI und ELH mit der vorhergehenden einerley seyn, und folglich noch zweyen rechten gleich bleiben.

6) Endlich, wenn eine dieser Eigenschaften statt findet, so müssen die Geraden DE und FG paralell seyn; denn nehmen wir zuvörderst an, daß die Gleichheit der correspondirenden Winkel statt finde, so folgt aus dem §. 45., daß diese Gleichheit auch den Parallelismus nach sich zieht; und was die vier andern Eigenschaften betrift, so braucht man bloß in Erwägung zu ziehen, daß sich aus jeder derselben die Gleichheit der correspondirenden Winkel herleiten läßt.

Denn die innern Wechselwinkel ELI und FMH können einander nicht gleich seyn, wenn nicht der Winkel GMI, welcher dem FMH als sein Scheitelwinkel gleich ist, auch dem ELI gleich ist. Es sind daher in diesem Falle die correspondirenden Winkel ELI und GMI einander gleich.

Eben so verhält es sich mit den äußern Wechselwinkeln ELH und FMI; denn da FMI und GMI als Scheitelwinkel gleich sind, so muß auch GMH seinem correspondirenden ELH gleich seyn.

Wenn man weiß, daß die Summe der innern oder der äußern von einerley Seite liegenden Winkel zweyen

rechten gleich ist, so kann man sich folgendermaßen überzeugen, daß die correspondirenden Winkel gleich sind. Wenn z. B. die Summe der Winkel ELI und GMH zweyen rechten gleich ist, so wird der Winkel ELI zweyen rechten weniger den Winkel GMH gleich sind; da aber die beyden Winkel GMH und GMI als Nebenwinkel zwey rechte betragen, so wird auch der Winkel GMI zweyen rechten weniger dem Winkel GMH, und folglich seinem correspondirenden ELI gleich seyn, welcher mit ihm einerley Werth hat. Man kann auf eben die Art in Rücksicht der äußern von einerley Seite liegenden Winkel schließen.

§. 48. Aufgabe.

Einer gegebenen geraden Linie AB Fig. 26. durch einen gegebenen Punct C eine Parallele zu führen.

Auflösung.

Durch den Punct C ziehe man irgend eine beliebige die AB schneidende Linie CB; hierauf lege man an die Gerade CB aus dem Puncte C einen dem ABC gleichen Winkel an (§. 23.); so wird die durch dieses Verfahren erhaltene Gerade CD mit AB parallel seyn; denn sie geht durch den Punct C, und wenn man CB als Secante betrachtet, so sind die innern Wechselwinkel ABC und BCD nach der Construction einander gleich.

§. 49. Aufgabe.

Durch einen außerhalb der Linie AB Fig. 27. gegebenen Panct C eine gerade Linie zu führen, welche mit der ersten einen dem gegebenen Winkel a gleichen Winkel bildet.

Auflösung.

An irgend einen Punct der geraden AB, lege man den Winkel DAB gleich dem Winkel a an (§. 23.), und führe dann nach dem vorhergehenden §. durch den Punct C zu AD eine Parallele CE; diese letztere wird mit AB einen Winkel CEB bilden, welcher (§. 47.) dem Winkel DAB und folglich dem Winkel a gleich seyn wird.

§. 50. Lehrsatz.

Die Winkel ABC, DEF Fig. 28., deren Seiten zu einander parallel sind, und deren Oeffnung nach einerley Richtung liegt, sind einander gleich.

Beweis.

Wenn man die Seiten DE und DF des zweyten Winkels so weit verlängert, bis sie die des ersten schneiden, und die Parallelen EF und CH in Rücksicht der Secante DH betrachtet, so wird man leicht einsehen, daß die Winkel DE und DHC als correspondirende Winkel gleich sind (§. 47.); betrachtet man ferner die Parallelen AB und DH in Rücksicht der Secante BC, so wird man leicht einsehen, daß die Winkel DHC und ABC als correspondirende Winkel gleich sind; da nun die beyden Winkel DEF und ABC einem dritten DHC gleich sind, so müssen sie auch einander gleich seyn.

§. 51. Lehrsatz.

Die drey Winkel eines Dreyecks zusammen genommen, betragen immer zwey rechte.

Beweis.

Wenn man durch den Winkel A irgend eines Dreyecks ABC Fig. 29. eine Gerade AD zur gegenüberstehen-

den Seite BC parallel führt, so werden die auf der Secante AB gebildeten Winkel ABC und EAD als correspondirende Winkel gleich seyn (§. 47.); desgleichen sind die Winkel DAC und ACB als innere Wechselwinkel in Rücksicht der Secante AC einander gleich (§. 47.). Es wird daher der aus den Winkeln EAD und DAC zusammengesetzte Winkel EAC der Summe der beyden Winkel ABC und ACB des vorgelegten Dreyecks gleich seyn; wenn man aber zum Winkel EAC den dritten Winkel CAB hinzusetzt, so hat man um den Punct A auf der Geraden EB, drey Winkel EAD, DAC, CAB, welche denen des Dreyecks ABC, und zugleich zweyen rechten gleich sind (§. 10.).

Anmerkung.

Es ist hierbey nützlich sich zu merken, daß der Winkel EAC der äußere Winkel des Dreyecks ABC genannt wird, und aus dem Vorhergehenden folgt, daß er allein den beyden gegenüberstehenden Winkeln ABC, ACB zusammen genommen gleich ist.

§. 52. Zusatz.

Aus dem obigen Satze folgt, daß, wenn zwey Winkel eines Dreyecks respectiv zweyen Winkeln eines andern Dreyecks gleich sind, auch der dritte Winkel des einen Dreyecks dem dritten Winkel des andern gleich seyn muß, weil der letztere Winkel zu den beyden in jedem Dreyecke hinzugesetzt, sowohl in dem einen als dem andern eine gleiche Summe giebt.

Man sieht ferner hieraus, daß ein Dreyeck nur einen einzigen rechten Winkel haben kann, und noch weniger mehr als einen stumpfen haben kann.

§. 53.

Ein rechtwinkligtes Dreyeck nennt man dasjenige, welches einen rechten Winkel hat; ein spitzwinkligtes heißt, welches lauter spitze Winkel hat, und ein stumpfwinkligtes, welches einen stumpfen Winkel hat. Die beyden letztern Arten sind unter der allgemeinen Benennung der schiefwinklichten Dreyecke begriffen.

Es ist klar, daß im gleichseitigen Dreyecke, in welchem (§. 37.) alle drey Winkel einander gleich sind, ein jeder derselben zwey Drittheile eines rechten beträgt.

§. 54. Lehrsatz.

Die Theile AC und BD Fig. 30. der geraden und parallelen Linien, welche zwischen zweyen Parallelen liegen, sind einander gleich, und umgekehrt.

Beweis.

Wenn man die Gerade AD zieht, so bildet man die Dreyecke ABD und ACD, welche einander gleich seyn werden; denn nimmt man AD für die Secante der Parallelen AB und CD, so wird man sehen, daß die Winkel BAD und ADC als innere Wechselwinkel einander gleich seyn werden (§. 47.); betrachtet man dann dieselbe Gerade als die Secante der Parallelen AC und BD, so wird man leicht finden, daß die Winkel ADB und DAC aus eben der Ursache gleich seyn werden; da ferner die Seite AD den beyden Dreyecken ABD und ACD gemein ist, so werden diese Dreyecke einander gleich seyn; es müssen daher auch die dem Winkeln BAD und ADC gegenüberstehenden Seiten AC und BD einander gleich seyn. Dasselbe ist auch bey den Seiten AB und CD der Fall.

Wenn umgekehrt die Theile CD und AB, so wie die Theile AC und BD einander gleich sind, so werden die Dreyecke ACD und ABD ihre Seiten stückweise gleich haben, und folglich einander gleich seyn. Die Gleichheit der innern Wechselwinkel CAD und ADB führt den Parallelismus der Geraden AC und BD ein (§. 47.), und die Gleichheit der Winkel BAD und CAD, den der Geraden AB, CD.

Es läßt sich sehr leicht beweisen, daß die Geraden CD und AB gleich und parallel sind, sobald die Geraden AC und BD gleiche Parallele sind.

§. 55. Zusatz.

Die Richtigkeit des vorhergehenden Satzes würde noch dann statt haben, wenn auch die Geraden AC und BD auf AB und CD senkrecht wären, weil sie immer parallel zu einander wären; da aber alsdann die Theile AC und BD die Entfernung der beyden Geraden AB und CD messen, so folgt, daß zwey Parallele in allen ihren Theilen eine gleiche Entfernung von einander haben.

§. 56. Lehrsatz.

Wenn man auf einer von zweyen geraden Linien AF und GM Fig. 31. eine beliebige Anzahl gleich weit von einander entfernter Puncte nimmt, und durch alle diese Puncte Parallele AG, BH, CI ꝛc. führt, bis sie die andre Linie schneiden, so werden die Theile GH, HI, IK ꝛc. der andern Linie ebenfalls einander gleich seyn.

Beweis.

Wenn man durch die Puncte G, H, I ꝛc. die Linien GN, HO, IP ꝛc. zu AF parallel führt, so bildet man

die Dreyecke GNH, HOI, IPK ꝛc., in welchen die Seiten NG, HO, IP ꝛc., welche den Seiten AB, BC, CD ꝛc. als Parallele zwischen Parallelen respectiv gleich sind (§. 54.), auch einander gleich seyn werden. Die Winkel NGH, OHI, PIK ꝛc. sind als correspondirende Winkel in Rücksicht der Secante GM einander gleich; und endlich sind es auch die Winkel GNH, HOI, IPK ꝛc., weil ihre Seiten parallel sind, und ihre Oeffnung nach einerley Richtung gehen (§. 50.). Da nun diese Dreyecke eine Seite und die anliegenden Winkel gleich haben, so sind sie einander gleich (§. 18.), woraus auch die Gleichheit der Seiten GH, HI, IK ꝛc. folgt.

§. 57. Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß AB in AF so viel Mahl enthalten ist, als GH in GM; so daß man diese Proportion hat

$$AB : AF = GH : GM,$$

welche man in diese andre verwandeln kann:

$$AB : GH = AF : GM;$$

und aus dieser letztern zieht man:

$$2AB : 2GH = AF : GM$$
$$3AB : 3GH = AF : GM \text{ ꝛc.}$$

Das heißt, daß eine jede Anzahl Theile der AF sich zu einer gleichen Anzahl Theile der GM verhält, wie die Gerade AF zur Geraden GM.

§. 58. Lehrsatz.

Drey Parallele AG, DK, FM schneiden immer irgend zwey Linien in proportionale Theile, oder dergestalt, daß man hat

$$AD : DF = GK : KM.$$

Beweis.

Hierbey können zwey Fälle eintreten: 1) wenn AD und AF commensurable sind, d. h. wenn das Verhältniß von AD zu AF durch zwey Zahlen genau ausgedrückt werden kann. Wir wollen z. B. annehmen

$$AF : AD = 47 : 25.$$

Wenn man sich nun AF in 47 gleiche Theile getheilt denkt, so wird AD 25 derselben, und DF 22 enthalten. Führt man dann durch alle Theilungspuncte zu AG parallele Linien, so wird die Gerade GM in 47 Theile zerlegt seyn, von denen GK 25, und KM 22 enthält; man wird also haben

$$AD : DF = 25 : 22$$
$$GK : KM = 25 : 22$$

woraus folgt

$$AD : DF = GK : KM.$$

Die Proportionen

$$AF : AD = 47 : 25$$
$$GM : GK = 47 : 25$$

geben ferner

$$AF : AD = GM : GK.$$

2) Wenn AF und AD incommensurable sind, so kann man folgendermaaßen beweisen, daß das Verhältniß von AF zu AD weder kleiner noch größer, als das von GK zu GM seyn kann.

Es sey zuvörderst

$$AF : AD = GM : GI,$$

wo GI kleiner als GK ist. Man kann immer die Seite AF in so kleine Theile theilen, damit, wenn man durch alle Theilungspuncte zu FM parallele führt, eine dieser

Parallelen, de, zwischen I und K falle; nach dem Vorhergehenden wird man wegen der Commensurabilität von AF und Ad haben

$$AF : Ad = GM : Ge.$$

Da die vordern Glieder dieser Proportion mit denen der vorhergehenden einerley sind, so kann man zwischen den hintern Gliedern beyder Proportionen folgende neue Proportion bilden

$$AD : Ad = GI : Ge,$$

ein ungereimtes Resultat, weil AD größer als Ad, GI aber kleiner als Ge ist.

Man kann aber auch nicht haben

$$AF : AD = GM : GI',$$

wo GI größer als GK ist; denn nachdem man AF dergestalt getheilt hat, daß eine der Parallelen d'e' zwischen die Punkte K und I fällt, wird man haben

$$AF : Ad' = GM : Ge'.$$

Bildet man zwischen den hintern Gliedern beyder Proportionen eine neue Proportion, so wird man haben

$$AD : Ad' = GI' : Ge',$$

ein noch immer ungereimtes Resultat, weil AD kleiner als Ad', GI' aber größer als Ge' ist. Es muß daher nothwendigerweise das vierte Glied der mit AF, AD, GM gebildeten Proportion GK seyn.

Aus der Proportion

$$AF : AD = GM : GK$$

zieht man

$$AF - AD : AD = GM - GK : GK,$$

oder

$$FD : AD = KM : GK$$

oder endlich

$$AD : FD = GK : KM,$$

wenn man die beyden Verhältuisse umkehrt *).

§. 59. Erster Zusatz.

Wenn man durch den Punct G die Gerade GN zu AF parallel führt, so wird man haben

$$GO = AD, \quad ON = DF,$$

und nach dem Vorhergehenden

$$GO : ON = GK : KM$$
$$GO : GN = GK : GM.$$

Wenn man also in einem Dreyecke eine Gerade OK zu einer seiner Seiten NM parallel führt, so werden die

---

*) Man könnte vielleicht einige Schwierigkeit darin finden, den Begriff von Verhältniß, so wie man ihn bey den Zahlen erhalten hat, auf die Theile der Ausdehnung überzutragen, und besonders, wenn es zwey zu einander incommensurabte Linien betrift. Allein die Dunkelheit verschwindet, wenn man in Erwägung zieht, daß man zwey Linien nur dann vergleichen kann, wenn man sie auf ein, beyden gemeinschaftliches Maaß bezieht, und alsdann ist ihr Verhältniß wirklich eine Zahl oder ein Bruch, dessen Glieder durch die Zahlen ausgedrückt sind, welche angeben, wie oft das gemeinschaftliche Maaß in jeder derselben anzutreffen ist. Ob nun gleich dieser Bruch nicht genau angegeben werden kann, wenn das Verhältniß incommensurable ist, so existirt es doch wenigstens, indem man sich ihm so viel als man will nähern kann; und zwey incommensurable Verhältnisse müssen als gleich angesehen werden, sobald man beweisen kann, daß, so weit man auch die Annäherung des einen und des andern treiben mag, ihre Differenz immer Null bleibt.

beyden andern Seiten GN und GM durch diese Gerade in proportionale Theile geschnitten.

§. 60. Zweyter Zusatz.

Wenn umgekehrt eine Gerade zwey Seiten eines Dreyecks proportional schneidet, so ist sie zur dritten parallel.

Denn wenn man im Dreyecke ABC Fig. 32 *

$$AB : Ae = AC : Af$$

hätte, und die Linie ef nicht zu BC parallel wäre, so könnte man durch den Punct e eine Gerade eH zu BC parallel führen, welche geben würde

$$AB : Ae = AC : AH \text{ (§. 59.)},$$

eine Proportion, deren drey erste Glieder mit denen der vorhergehenden einerley sind; hieraus folgt, daß $AH = AF$, und daß folglich die Geraden ef und eH auf einander fallen, oder daß die erste nothwendigerweise zu BC parallel ist.

§. 61. Dritter Zusatz.

Die Gerade BD Fig. 32 **, welche einen Winkel B eines beliebigen Dreyecks ABC halbirt, theilt die gegenüberstehende Seite AC, in zwey Abschnitte, welche den diesen Winkel einschließenden Seiten proportional sind, d. h. daß man die Proportion hat

$$AD ; DC = AB : BC.$$

Dieses läßt sich beweisen, wenn man CE zu BD parallel führt, und AB verlängert, bis sie diese Parallele im Puncte schneidet, woraus man (§. 59.) folgende Proportion erhält

$$AD : DC = AB : BE.$$

Nun

Nun ist das Dreyeck CBE gleichschenklicht, weil die Winkel BCE und CBD als innere Wechselwinkel in Rücksicht der Secante BC, so wie die Winkel BEC und ABD als correspondirende Winkel in Rücksicht der Secante AE gleich sind; und weil ferner die Winkel ABD und CBD als Hälften des Winkels ABC gleich sind, woraus die Gleichheit der Winkel BCE und BEC erfolgt; mithin ist B gleich BC (§. 37), und folglich

$$AD : DC = AB : BC.$$

§. 62. Aufgabe.

Zu dreyen gegebenen Linien M, N, P Fig. 33. eine vierte Proportionale zu finden, oder das vierte Glied dieser Proportion

$$M : N = P : x.$$

Auflösung.

Man ziehe unter einem beliebigen Winkel zwey unbegränzte gerade Linien AB und AC; man nehme dann auf der ersten von A in B eine Entfernung AB, welche der M gleich ist, und von A in D, eine der N gleiche Entfernung; man trage ferner auf die zweyte von A in C die dritte Gerade P. Verbindet man dann die Puncte B und C durch eine Gerade, und zieht durch den Punct D, parallel zu BC, die Gerade DE, so wird man in AE die verlangte vierte Proportionallinie haben, weil

$$AB : AD = AC : AE \text{ (§. 59.)},$$

welches giebt

$$M : N = P : AE.$$

Wenn die beyden Geraden N und P einander gleich waren, so würde die durch die Proportion

$$M : N = N : AE$$

gegebene Linie AE diejenige seyn, welche die Geometer die dritte Proportionallinie, oder die dritte Proportionale nennen. Die Construction ist in diesem Falle von der des vorhergehenden Falles nicht unterschieden; der Punct C fällt alsdann in c, und die zu Be parallele Gerade De, schneidet auf AC den Theil Ae ab, welcher der gesuchten dritten Proportionale gleich ist, weil man hat

$$AB : AD = Ac : Ae$$

oder

$$M : N = N : Ae$$

§. 63.

Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel des einen respectiv den Winkeln des andern gleich, und die in beyden Dreyecken gleichen Winkeln gegenüber stehenden Seiten, welche man aus dieser Ursache homologe Seiten nennt, proportional sind.

Diese beyden Bedingungen sind so mit einander verbunden, daß die eine nothwendigerweise die andre zur Folge hat.

§. 64. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken die Winkel des einen denen des andern stückweise gleich sind, so sind die homologen Seiten proportional, und sie sind folglich einander ähnlich.

Beweis.

Nimmt man auf AB und AC zwey Theile Ae und Af, respectiv der DE und der DF gleich, und zieht man

die Linie ef, so werden die Dreyecke eAf und EDF (§. 16.) einander gleich seyn, weil nach der Annahme der Winkel A des einen, dem Winkel D des andern, und nach der Construction die Seiten Ae und Af den Seiten DE und DF gleich sind. Da nun der Winkel Aef dem Winkel E gleich ist, so wird er es auch dem Winkel B, und es wird also mithin ef zu BC parallel seyn. Man hat also die Proportion

$$Ae : AB = Af : AC$$

oder

$$DE : AB = DF : BC.$$

Zieht man hierauf Gf zu AB parallel, so wird man erhalten

$$Af : AC = BG : BC$$

oder

$$DF : AC = BF : BC,$$

weil BG der ef gleich ist (§. 54.), welcher auch EF gleich ist. Nimmt man diese letztere Proportion mit der ersten vermittelst des Verhältnisses DF : AC, welches beyden gemein ist, zusammen, so wird man diese Reihe gleicher Verhältnisse haben:

$$DE : AB = DF : AC = EF : BC,$$

woraus folgt, daß die homologen Seiten der Dreyecke ABC, DEF einander proportional sind.

§. 65. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß zwey Dreyecke einander ähnlich sind.

1) Wenn bloß zwey Winkel des einen zweyen Winkeln des andern stückweise gleich sind, weil alsdann auch

der dritte Winkel des einen nothwendigerweise dem dritten Winkel des andern gleich seyn muß (§. 52.).

2) Wenn ihre Seiten respectiv parallel sind.

3) Wenn ihre Seiten respectiv auf einander senkrecht sind.

Der zweyte Theil ist offenbar bey den, wie ABC und DEF liegenden Dreyecken; denn die Winkel, welche wie A und D ihre Oeffnung nach einerley Richtung haben, sind einander gleich (§. 50.).

Was die in einer umgekehrten Lage liegenden Dreyecke betrifft, wie in Fig. 35., so erhält man, wenn die Seite EF des Dreyecks DEF dergestalt verlängert, daß sie zwey des Dreyecks ABC in G und H schneidet, die gleichen Winkel AGH und DEF, weil sie in Rücksicht der Parallelen AB, DE, und der Secante FH, äußere Wechselwinkel sind; ferner sind auch die Winkel AHG und DFE als innere Wechselwinkel in Rücksicht der Parallelen AC, DF einander gleich, und es ist daher das Dreyeck EDF dem Dreyecke AGH ähnlich. Da aber dieses letztere dem Dreyecke ABC ähnlich ist, weil die Winkel AHG und AGH den Winkeln ACB, ABC als correspondirende Winkel in Rücksicht der Parallelen GH, BC und den Secanten AC, AB gleich sind, so wird auch das Dreyeck EDF dem ABC ähnlich seyn.

Es sind offenbar in diesem Falle die homologen Seiten zu einander parallel.

Um den letzten Theil zu beweisen, seyen die beyden Dreyecke ABC und DEF Fig. 36. dergestalt gegen einander gelegt, daß die Seite EF auf der verlängerten BC, daß DF verlängert auf AC, und daß endlich DE ver-

längert auf AB senkrecht sey; durch den Punct A, welcher der auf EF senkrechten Seite BC gegenüber liegt, führe man die Geraden AG und AH respectiv zu den anderu Seiten DF und DE des Dreyecks DEF parallel, und folglich die eine auf AC, und die andre auf AB senkrecht. Die Winkel CAG und BAH werden nach der Annahme rechte seyn; setzt man nun zu jedem derselben den nehmlichen Winkel CAH hinzu, so werden die hierdurch entstehenden Winkel BAC und GAH gleich seyn; unn haben die Winkel GAH und EDF nach der Construction ihre Seiten parallel, und ihre Oeffnung nach einerley Richtung, und sind also gleich; es wird daher auch der Winkel BAC dem EDF gleich seyn.

Führt man hierauf durch den Punct B die Geraden BI und BK den Seiten EF und DE parallel, so wird man die rechten Winkel CBI und ABK bilden, und wenn man den gemeinschaftlichen Theil ABI abzieht, so bleiben die gleichen Winkel ABC, ICK; da nun der zweyte dieser Winkel wegen des Parallelismus der Geraden BI und EF, BK und DE, dem DEF gleich ist, so kann man daraus schließen, daß auch ABC gleich DEF ist. Die Dreyecke ABC und DEF, deren Winkel stückweise gleich sind, werden also einander ähnlich seyn.

Man sieht ferner, daß die homologen Seiten die respectiven senkrechten sind, weil, wenn der Winkel D dem Winkel A gleich ist, die Seite EF der BC homolog ist, und so von den übrigen.

§. 66. Lehrsatz.

Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn ein

Winkel des einen, einem Winkel des andern gleich, und die diese Winkel einschließenden Seiten proportional sind.

Beweis.

Wir wollen annehmen, daß der Winkel A des Dreyecks ABC Fig. 34. dem Winkel D des Dreyecks DEF gleich sey, und daß man habe AB : DE = AC : DF; man nehme auf den Seiten AB und AC des ersten Dreyecks zwey Theile Ae und Af respectiv der DE und der DF gleich; zieht man dann ef, so bildet man (§. 16.) das dem Dreyecke DEF gleiche Dreyeck Aef, und die Gerade ef, welche die Seiten des Dreyecks ABC in proportionale Theile theilt, weil man dann hat

AB : AD oder Ae = AC : DF oder Af

wird zu BC parallel seyn (§. 60.). Die Winkel e und f, welche respectiv den Winkeln E und F gleich sind, werden es auch den Winkeln B und C seyn, und folglich werden die Dreyecke ABC und DEF, welche gleiche Winkel haben, einander ähnlich seyn (§. 64.).

§ 67. Lehrsatz.

Wenn die Seiten eines Dreyecks denen eines andern proportional sind, so sind beyde Dreyecke einander ähnlich.

Beweis.

Es sey in den Dreyecken ABC, DEF diese Reihe gleicher Verältnisse

AB : DE = AC : DF = BC : EF;

nimmt man auf AB einen Theil Ae der DE gleich, und zieht ef zu BC parallel, so werden die (§. 65.) einander ähnlichen Dreyecke geben

AB : Ae = AC : Af = BC : ef;

weil aber Ae der DE gleich ist, so sind alle Verhältnisse der zweyten Reihe denen der ersten gleich, und da die vordern Glieder in beyden einerley sind, so müssen es auch die hintern seyn; man wird also haben

Af = DF, ef = EF.

Hieraus folgt, daß das Dreyeck DEF dem Dreyecke Aef gleich ist; und da dieses letztere dem Dreyecke ABC ähnlich ist, so muß es auch das erstere seyn.

§. 68. Aufgabe.

Auf eine gegebene Gerade EF ein dem Dreyecke ABC ähnliches Dreyeck zu setzen.

Auflösung.

Man kann ein einem andern ähnliches Dreyeck construiren, wenn man von den verschiedenen Kennzeichen ausgeht, mit welchen die Aehnlichkeit eines Dreyecks bestehen muß. Will man daher auf die Gerade EF ein dem gegebenen Dreyecke ABC ähnliches Dreyeck setzen, so kann man hierzu gelangen,

1) wenn man an die Puncte E und F der Linie EF zwey Winkel anlegt, welche den Winkeln B und C respectiv gleich sind (§. 65.).

2) Wenn man an den Punct E der Linie EF einen dem Winkel B gleichen Winkel anlegt, und auf die Seite DE dieses Winkels eine Entfernung DE trägt, welche zu den drey Linien BC, EF und AB die vierte Proportionallinie ist; die beyden Dreyecke werden auf diese Art noch ähnlich seyn, weil sie einen Winkel gleich, und

die diesen Winkel einschließenden Seiten proportional haben (§. 66.).

3) Endlich wenn man zu den drey Linien BC, EF, AB eine vierte Proportionallinie sucht, dann eine andre zu den drey Linien BC, EF und AC, und aus den gefundenen beyden Linien nebst der Linie EF ein Dreyeck DEF construirt; die Dreyecke DEF und ABC werden ähnlich seyn, weil ihre Seiten proportional sind (§. 67.).

§. 69. Lehrsatz.

Jede beliebige Anzahl von einem einzigen Puncte ausgehender Linien AB, AC, AD, AE, AF Fig. 37. werden von zweyen Parallelen proportional geschnitten, und sie schneiden auch diese letztern proportional.

Beweis.

Da die Dreyecke BAC, CAH ähnlich sind (§. 65.), so hat man aus diesen Dreyecken

$$AB : AG = AC : AH = BC : GH;$$

aus den Dreyecken CAD und HAI hat man

$$AC : AH = AD : AI = CD : HI;$$

aus den Dreyecken DAE, IAK,

$$AD : AI = AE : AK = DE : IK;$$

Aus den Dreyecken EAF, KAL,

$$AE : AK = AF : AL = EF : KL.$$

Alle diese Verhältnisse sind einander gleich, weil das zweyte einer jeden Reihe das erste der nächstfolgenden ist. Nimmt man zuvörderst nur diejenigen, welche die durch den Punct A geführten Linien enthalten, so wird man haben

$$AB : AG = AC : AH = AD : AI = AE : AK = AF : AL;$$

nimmt man diejenigen zusammen, welche Theile der Parallelen BF und GL enthalten, so wird kommen

$$BC : GH = CD : HI = DE : IK = EF : KL,$$

woraus zu ersehen ist, daß diese Linien in proportionale Theile geschnitten sind.

Betrachtet man nun die Dreyecke BAC, CAD, DAE, EAF, als wären zwey Seiten derselben von einer zur dritten parallelen geschnitten, so würde man haben (§. 59.)

$$AG : BG = AH : HC$$
$$AH : HC = AI : ID$$
$$AI : ID = AK : KE$$
$$AK : KE = AL : LF,$$

woraus man zieht

$$AG : BG = AH : HC = AI : ID = AK : KE = AL : LF,$$

und hieraus folgt, daß die Geraden AB, AC, AD, AE, AF proportional geschnitten sind.

§. 70. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie nach eben dem Verhältniß zu theilen, nach welchem eine andre gegebene eingetheilt ist.

Auflösung.

Es sey gl die einzutheilende, und BF die schon eingetheilte Linie. Man setze auf diese letztere ein Dreyeck BAF, dessen drey Seiten alle einander gleich sind, welches sich nach §. 21. bewerkstelligen läßt, indem man die

Linie BF selbst als Halbmesser zu den aus den Puncten B und F zu beschreibenden Kreisen nimmt; hiernächst trage man gl auf die Seite AB von A in G, und auf die Seite AF von A in L, und ziehe GL; die Geraden, welche die Puncte C, D, E mit dem Puncte A verbinden, werden die Linie GL in Theile theilen, welche denen der BF proportional sind, wie es der Vortrag der Aufgabe erfordert.

Denn da AB = AF, AG = AL, so hat man offenbar die Proportion

$$AB : AG = AF : AL,$$

aus welcher folgt (§. 60.), daß GL zu BF parallel ist. Da also das Dreyeck GAL dem BAF ähnlich ist, so hat man die Proportion

$$AB : AG = BF : GL;$$

und da nach der Construction BF = AB, so hat man nothwendigerweise GL = AG = gl. Dieses vorausgesetzt, werden nach dem vorhergehenden §. die zu einander parallelen GL und BF in proportionale Theile, oder die eine wie die andre eingetheilt seyn.

Wenn die einzutheilende Linie g′l′, also größer als BF wäre, so müßte man die Seiten AB und AF unterhalb BF unbestimmt verlängern; hierauf müßte man g′l′ auf AB von A in G′ und auf AF von A in L′ tragen; zieht man dann G′L′, so werden die Verlängerungen der Geraden AC, AD, AE die Linie G′L′ in den Puncten H′′ I′, K′ nach eben dem Verhältniß theilen, nach welchem BF getheilt ist.

§. 71. Anmerkung.

Die vorhergehende Aufgabe kann auch folgendermaßen aufgelöst werden:

Es sey AH Fig. 38. die einzutheilende Linie; man ziehe durch den Punct A eine unbegränzte Gerade AP, welche mit AH einen beliebigen Winkel PAH macht, auf welche man der Ordnung nach die Theile derjenigen Linie trägt, deren Eintheilung bekannt ist; man verbinde dann den äußersten Punct P der letztern mit dem Endpunct H der einzutheilenden Linie. Hierauf ziehe man durch die Puncte I, K, L, M, N, O, parallel zu PH die Geraden IB, KC, LD, ME, NF, OG, welche die AH in Theile zerlegen wird, welche denen der AP proportional sind.

Dieses Verfahren läßt sich beweisen, wenn man in Erwägung zieht, daß man im Dreyecke ACK, dessen Seiten AC und AK von einer zur dritten Seite CK Parallelen BI geschnitten werden, folgende Proportionen hat

$$AB : AI = AC : AK = BC : IK.$$

Das Dreyeck ADL in Rücksicht der Geraden CK betrachtet, giebt

$$AC : AK = AD : AL = CD : KL.$$

Das Dreyeck AEM, in Rücksicht der Geraden LD betrachtet, giebt

$$AD : AL = AE : AM = DE : LM,$$

und so fort. Alle diese Reihen gleicher Verhältnisse lassen sich zusammen ziehen, weil das zweyte Verhältniß einer jeden das erste der folgenden ist; nimmt man nur

diejenigen Verhältnisse, welche die Eintheilung der Geraden AP enthalten, so wird man haben

AB : AI = BC : IK = CD : KL = DE : LM ꝛc.,

woraus zu ersehen ist, daß die Theile AB, CD, DE ꝛc. der AH, den Theilen AI, IK, KL ꝛc. der AP proportional sind.

Man vereinfacht dieses letztere Verfahren, wenn man durch den Punct H eine Linie QH parallel zu AP führt, und auf diese vom Puncte H aus die Theile HX, XV, VU, UT ꝛc. respectiv den Theilen PO, ON, NM, ML ꝛc. gleich nimmt; die Geraden PH, OX, NU ꝛc., welche die correspondirenden Theilpuncte verbinden, werden parallel seyn (§. 54.), und folglich die Gerade AH in Theile theilen, welche denen der AP oder der HQ proportional seyn werden.

§. 72. Erster Zusatz.

Wenn in Fig. 37. die Theile der Geraden BF, und in Fig. 38. die der Geraden AP einander gleich waren, so würden im ersten Falle die der Geraden GL, und im zweyten die der Geraden AH ebenfalls einander gleich seyn.

Hieraus folgt, daß das Verfahren des §. 70. und das des §. 71. auch dienen können, eine gegebene gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. Man muß in dieser Absicht die Linien BF als unbegränzt betrachten; hierauf muß man auf dieser letztern einen beliebigen Theil BC nehmen, und ihn nacheinander so oft auf BF tragen, als die Anzahl der Theile ist, in welche die Linie GL getheilt werden soll; der Punct F, in

welchem sich diese Theile endigen, wird der äußerste Punct der Linie BF seyn, und man kann die Construction nach §. 70. endigen.

Nach dem Verfahren des §. 71. muß man die Gerade AP Fig. 38. als unbegränzt betrachten, auf welche dann die gleichen und willkührlichen Theile getragen werden müssen, weil AH die gegebene Linie vorstellt.

§. 73. Zweyter Zusatz.

Die Eintheilung der Geraden in gleiche Theile ist das Fundament zur Construction des Maaßstabes, das heißt der Linien, vermittelst welcher andre gemessen werden. Denn wenn man CD Fig. 3. in gleiche Theile getheilt hätte, so würde man bloß noch zu untersuchen haben, wie viele dieser Theile AB enthält, um das Verhältniß von AB zu CD zu erhalten, welches desto genauer erhalten wird, je kleiner die Theile der CD sind. Die Unvollkommenheit der Instrumente, und die Gränzen unsrer Sinne, nöthigen uns bald bey der Eintheilung der Linien stehen zu bleiben, wenn die Theile sich ihrer geringen Größe wegen unsern Sinnen entziehen; um unsre Mittel in dieser Hinsicht auszudehnen, hat man die in Fig. 39. vorgestellte Eintheilung durch Transversallinien erfunden, deren Construction folgende ist.

Nachdem man die Linie AC in irgend eine Anzahl gleicher Theile, wie BC getheilt hat, so führe man, um ferner BC in eine große Anzahl gleicher Theile zu theilen, von denen jeder bestimmt werden kann, durch die Puncte A, B, C auf AC die senkrechten AA‴, BK, CL; man nehme dann auf BK einen willkührlichen Theil

BD, welchen man so oft nach einander auf diese Linie trägt, als die Anzahl der Theile ist, in welche BC getheilt werden soll (in der Figur ist sie vier); durch die Theilungspuncte D, F, H, K ziehe man zu AC die Geraden DE, FG, HI, KL parallel, welche man bis zu den senkrechten AA'''' und CL verlängern kann; endlich verbinde man die Puncte B und L durch die Transversale BL.

Die Dreyecke BDE, BFG, BHI, BKL, welche offenbar einander ähnlich sind, (§. 65.), geben diese Proportionen

$$BD : BK = DE : KL$$
$$BF : BK = FG : KL$$
$$BH : BK = HI : KL,$$

woraus folgt: 1) daß weil BD der vierte Theil von BK ist, es auch DE von KL oder von BC seyn muß, welche der KL gleich ist (§. 54.); 2) daß weil BF $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ von BK ist, es auch FG von KL oder von BC seyn muß; 3) daß HI $\frac{3}{4}$ von KL oder von BC seyn muß, weil BH $\frac{3}{4}$ von BK ist.

Man sieht leicht, daß wenn man auf der ersten, zweyten und dritten der zu AB parallelen Linien die Entfernungen A'E, A''G, A'''I, welche respectiv der A'D + DE, A''F + FG, A''' + HI gleich sind, hierdurch erhalten wird

$$AB + \tfrac{1}{4}BC,\ AB + \tfrac{2}{4}BC,\ AB + \tfrac{3}{4}BC.$$

Dieses zeigt hinreichend, wie man einen Maaßstab von Transversallinien verfertigen könne, um beliebige Eintheilungen zu erhalten, und wie er gebraucht werden könne.

Ein dergleichen Maaßstab erhält den Nahmen des zehntheiligen Maaßstabes, wenn er zehn Parallelen zu AB enthält, weil er alsdann Zehntheile von BC giebt.

§. 74. Lehrsatz.

Wenn man vom rechten Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks auf die gegenüberstehende Seite, welche man die Hypothenuse nennt, eine senkrechte Linie fällt, so wird

1) diese senkrechte das Dreyeck in zwey andre zertheilen, welche ihm ähnlich, und folglich auch einander ähnlich seyn werden.

2) Theilt sie die Hypothenuse in zwey Theile oder Segmente dergestalt, daß jede anliegende Seite die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Hypothenuse, und dem ihr zunächst liegenden Segment ist.

3) Ist die senkrechte selbst die mittlere Proportionale zwischen beyden Segmenten der Hypothenuse.

Beweis.

Da das Dreyeck ABC Fig. 40. in B rechtwinklicht angenommen wird, und BD auf AC senkrecht ist, so werden die Dreyecke ABC, ABD einander ähnlich seyn (§. 65.); denn sie haben stückweise zwey Winkel einander gleich, nehmlich den Winkel A, welcher beyden gemein ist, und den rechten Winkel ABC im ersten, welcher dem rechten Winkel ADB im zweyten gleich ist. Aus eben der Ursache ist das Dreyeck BDC dem Dreyecke ABC ähnlich, weil der Winkel C beyden gemein ist, und und der Winkel BDC des einen ein rechter ist, so wie der Winkel ABC des andern.

Vergleicht man successiv jedes der beyden Dreyecke ABD und BDC mit dem Dreyecke CAB, und zieht dabey in Erwägung, daß die Winkel ABD und CBD respectiv den Winkeln C und A gleich sind, so erhält man zwischen ihren homologen Seiten folgende Proportionen:

$$AD : AB = AB : AC$$
$$CD : BC = BC : AC$$

welches den zweyten Theil des Satzes bestätigt.

Vergleicht mau endlich die Dreyecke ABD und BCD mit einander, so wird man haben

$$AD : BD = BD : CD,$$

welches den dritten Theil des oben vorgetragenen Satzes ausmacht.

§. 75. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß, wenn die drey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks nach einem und demselben gemeinschaftlichen Maaße gemessen wird, die zweyte Potenz der Zahl, welche die Länge der Hypothenuse ausdrückt, der Summe der zweyten Potenzen der Zahlen gleich ist, welche die Länge der beyden andern Seiten ausdrücken.

Denn die Proportionen

$$AD : AB = AB : AC$$
$$CD : BC = BC : AC$$

geben

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{AC}, \qquad CD = \frac{\overline{BC}^2}{AC};$$

nimmt man AD und CD zusammen, so hat man

$$AC = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{AC} \text{ oder } \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Hier-

Hieraus folgt, daß man die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks finden kann, dessen Seiten bekannt sind. Wenn z. B. $AB = 3$, $BC = 4$, so wird man haben

$\overline{AC}^2 = 9 + 16 = 25$, woraus folgt $AC = \sqrt{25} = 5$.

Umgekehrt kann man eine der Seiten eines rechtwinklichten Dreyecke finden, wenn die andre Seite nebst der Hypothenuse bekannt ist, weil man aus $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ziehen kann $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$. Wenn z. B. $AC = 13$, $BC = 12$, so wird man haben

$\overline{AB}^2 = 169 - 144 = 25$, woraus folgt $AB = 5$.

Im Allgemeinen ist

$$AC = \sqrt{(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)}, \quad AB = \sqrt{(\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)}.$$

§. 76. Lehrsatz.

Wenn die drey Seiten eines beliebigen Dreyecks nach einem gemeinschaftlichen Maaße gemessen, und folglich in Zahlen ausgedrückt sind, so ist, wenn man vom Endpuncte irgend einer dieser Linien auf eine der beyden andern eine senkrechte fällt, die zweyte Potenz der ersten gleich der Summe der zweyten Potenzen der letztern, weniger dem zweyfachen Producte aus der Seite, auf welche man die Senkrechte gefällt hat, in die Entfernung der Senkrechten von dem der ersten Seite gegenüber stehenden Winkel, wenn dieser Winkel spitz ist; und die zweyte Potenz derselben Linie ist gleich der Summe der zweyten Potenzen der beyden übrigen, nebst dem zuletzt genannten doppelten Producte, wenn der letztgenannte Winkel stumpf ist; das heißt, daß man im ersten Falle Fig. 41 und 41 * haben wird

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD},$$

und im zweyten, Fig. 42.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Beweis.

Wenn die senkrechte DC Fig. 41. ABC in zwey in D rechtwinklichte Dreyecke ACD und BCD zerlegt, so giebt das erste zuvörderst vermittelst des vorhergehenden §.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

und man erhält aus dem zweyten

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2.$$

Nach diesem Werthe von $\overline{CD}^2$ verwandelt sich der von $\overline{AC}^2$ in

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

nun ist offenbar, daß $AD = AB - BD$, eine Zahl, deren Quadrat $\overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$ ist *); setzt man diesen Werth in den Ausdruck für $\overline{AC}^2$, so wird man endlich haben

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

welches sich auf

---

*) In diesem Satze, worin ich die Linien als in Zahlen ausgedrückt betrachte, mußte ich die Zerfällung der zweyten Potenz einer Zahl, welche der Summe oder der Differenz zweyer andern gleich ist, als bekannt voraussetzen; eine Zerfällung, zu welcher man durch bloßes Raisonnement ohne Hülfe der algebraischen Bezeichnungen gelangen kann.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD}$$

reducirt.

In der Fig. 41*, wo die Senkrechte außerhalb des Dreyecks fällt, besteht der ganze Unterschied darin, daß

$$AD = BD - AB;$$

allein für das Quadrat hat man immer

$$\overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2,$$

so daß $\overline{AC}^2$ denselben Werth wie oben hat; dies wäre also der erste Fall.

Wenn die Seite AC, Fig. 42., einem stumpfen Winkel gegenüber liegt, so muß die Senkrechte nothwendigerweise außerhalb des Dreyecks fallen, und man findet noch aus den in D rechtwinklichten Dreyecken ACD und BCD

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2, \ \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

woraus man schließen kann

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

allein man hat $AD = AB + BD$, einen Werth, dessen Quadrat $\overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$ ist, und aus welchem folgt

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$$

welches sich auf

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BC}^2$$

reducirt, welches der zweyte Fall des vorgetragenen Satzes ist.

N. B. Die auf der Seite AB durch die senkrechte CD bestimmten Theile AD und BD heißen Segmente.

§. 77. Zusatz.

Vergleicht man diesen Lehrsatz mit dem vorhergehenden, so läßt sich daraus abnehmen, daß man, wenn die drey Seiten eines Dreyecks bekannt sind, bestimmen kann, ob der irgend einer Seite gegen über stehender Winkel, ein spitzer, ein rechter, oder ein stumpfer ist. Denn im ersten Falle, wo

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD},$$

muß offenbar die zweyte Potenz von AC kleiner seyn als die Summe der zweyten Potenzen der beyden andern Seiten AB und BC. Im zweyten Falle hat man nur, weil der Winkel B ein rechter ist

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2;$$

die zweyte Potenz von AC ist also der Summe der zweyten Potenzen der beyden andern gleich. Im dritten endlich, wo man hat

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD},$$

ist die zweyte Potenz von AC größer als die Summe der zweyten Potenzen der beyden andern Seiten.

Werden diese Bemerkungen auf ein Dreyeck angewandt, dessen Seiten durch 5, 7, 8, und deren zweyte Potenzen durch 25, 49, 64 ausgedrückt sind, so folgt daraus, daß der der Seite 8 gegenüber stehende Winkel spitz ist, weil die zweyte Potenz dieser Seite, 64, kleiner als die Summe 74 der zweyten Potenzen beyder übrigen Seiten ist.

Es ist wohl zu merken, daß die Art des der größten Seiten gegenüber liegenden Winkels, die des Dreyecks angiebt (§. 53.).

Von den Vielecken.

§. 78.

Die durch irgend eine Verbindung gerader Lenien begränzten Flächen werden Vielecke, Polygone genannt. Das einfachste von allen ist das Dreyeck. Die Polygone von vier Seiten werden überhaupt Vierecke genannt;

von fünf, Fünfecke;
von sechs, Sechsecke;

u. s. w. nach der Anzahl ihrer Seiten genannt.

In der Fig. 43 und 44. stellt ABCDEF ein Polygon von sechs Seiten oder ein Sechseck vor. Alle Winkel der ersten Figur, welche ihre Oeffnungen innerhalb der Figur haben, werden auswärtsgehende genannt. Der Winkel DEF der Figur 44. ist ein einwärtsgehender Winkel, weil er seine Oeffnung außerhalb des Polygons hat.

§. 79. Lehrsatz.

Wenn man von einem Winkel eines Polygans nach allen andern Linien zieht, welche man Diagonallinien nennt, so wird die Anzahl der Dreyecke, in welche dieses Polygon zerlegt wird, der Anzahl der Seiten, um zwey vermindert gleich seyn.

Beweis.

Dieser Satz ist beynahe aus dem bloßen Anblick der Fig. 43 klar, woselbst man sieht, daß die vom Winkel C nach den Winkeln A, F und E geführten Geraden CA, CF, CE das Polygon von sechs Seiten ABCDEF

in vier Dreyecke ABC, ACF, FCE, ECD theilen. Man wird sich leicht überzeugen, daß dieses bey einem jeden Polygon von jeder beliebigen Anzahl Seiten der Fall seyn muß, wenn man in Erwägung zieht, daß die beyden äußern Dreyecke, wie ABC, ECD, zwischen den alle diejenigen, welche das vorgelegte Polygon enthalten, indessen jedes der übrigen nur eine einzige hat; es werden sich also in diesen beyden Dreyecken vier Seiten des Polygons befinden; die Anzahl der dazwischen liegenden Dreyecke wird also der um vier verminderten Anzahl der Seiten des Polygons gleich seyn; und die ganze Anzahl der Dreyecke wird mithin, wie es der Vortrag des Satzes angiebt, der um zwey verminderten Anzahl der Seiten des Polygons gleich seyn.

§. 80. Zusatz.

Hieraus folgt, daß die Summe aller innern Winkel, ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB eines Polygons so viel Mahl zwey Rechte beträgt, als die Anzahl der Seiten weniger zwey ist, weil diese Summe aus denen der Winkel eines jeden der Dreyecke ABC, ACF, FCE, ECD, zusammengesetzt ist, deren jedes zwey rechte enthält, und weil das Polygon so viele solcher Dreyecke enthält, daß die Anzahl der Seiten weniger zwey ist.

In der Fig. 44. ist der einwärtsgehende Winkel DFE außerhalb und nicht innerhalb. Läßt man die Diagonalen vom Scheitel E dieses Winkels ausgehen, so sieht man offenbar, daß er in der Summe der innern Winkel durch die der Winkel DEC, CEB, BEA, AEF

ersetzt wird, und daß er mit dieser letztern zusammen genommen vier rechte beträgt (§. 13.).

§. 81. Lehrsatz.

Wenn man alle Seiten AB, BC, CD ꝛc. Fig. 43. eines Polygons, welches keine einwärts gehende Winkel hat, nach einerley Richtung verlängert, so ist die Summe der äußern Winkel aAB, bBC, cCD ꝛc., welche von jeder Seite und der Verlängerung der ihr anliegenden, gebildet werden, vier Rechte, wie groß auch die Anzahl der Seiten des Polygons seyn mag.

Beweis.

Jeder äußere Winkel, wie aAB, beträgt mit dem neben ihm liegenden innern Winkel zwey rechte, und diese Summe findet sich in jedem Polygon so oft wiederholt, als es Seiten oder Winkel hat; die Summe aller äußern und innern Winkel zusammen genommen wird mithin so viel Mahl zwey rechte betragen, als das Polygon Seiten hat. Zieht man von dieser Summe die der innern ab, welche so viel Mahl zwey rechte beträgt, als das Polygon Seiten hat, weniger zwey, so werden zwey Mahl zwey rechte, oder vier rechte für die Summe der äußern Winkel übrig bleiben.

§. 82. Anmerkung.

Zwey Polygone sind einander gleich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl gleicher und ähnlich legender Dreyecke zusammengesetzt sind; denn es ist klar, daß diese Polygone auf einander gelegt, sich völlig decken werden.

§. 83. Lehrsatz.

Wenn man alle Seiten eines Polygons außer einer,

und alle zwischen den gegebenen Seiten enthaltene Winkel kennt, so ist das Polygon bestimmt, und kann construirt werden.

Beweis.

Wenn man im Polygon ABCDEF die Seiten AB, BC, CD, DE, EF, und die zwischen denselben enthaltenen Winkel kennt, so kann man an $A'B' = AB$ den Winkel $A'B'C' = ABC$ anlegen und $B'C' = BC$ nehmen; man kann dann an den Punct C' auf B'C' den Winkel $B'C'D' = BCD$ anlegen und $C'D' = CD$ nehmen; hiernächst durch den Punct D' der Linie C D' die der DE gleiche Linie D'E' unter dem Winkel $C'D'E' = CDE$ anlegen; dann durch den Punct E' den Winkel $D'E'F' = DEF$, und endlich $E'F' = EF$ nehmen. Wenn man auf diese Art zum Puncte F gelangt ist, so bleibt nur noch eine einzige Art, ihn mit dem Puncte A' zu verbinden, und das Polygon zu schließen.

Es ist klar, daß dieses Polygon in allen seinen Theilen dem Polygon ABCDEF gleich seyn wird; denn wenn man es auf diese letztere trägt, indem man A'B' auf AB trägt, so wird wegen der Gleichheit der Winkel ABC und A'B C' die Seite B'C' auf die ihr gleiche BC fallen; und wenn man so stufenweise weiter schließt, so wird sich leicht ergeben, daß die Puncte A', B', C', D', E', F' respectiv auf A, B, C, D, E, F fallen; woraus folgt, daß die beyden Polygone einander völlig decken.

§. 84. Anmerkung.

Es giebt mehrere andre Fälle der Gleichheit zwischen zweyen Polygonen; wir wollen im Vorhergehen-

den nur ein Beyspiel dieser Gleichheit geben, um zu zeigen, daß ein Polygon von irgend einer Anzahl N Seiten, und also N Winkel hat, welches mithin aus 2N Stücken besteht, bestimmt ist, sobald man 2N — 3 dieser Stücke kennt. Hierbey ist noch zu erwägen, wie schon bey den verschiedenen Fällen der Gleichheit der Dreyecke erinnert worden, daß die N Winkel nur für N — 1 gegebene Stück gerechnet werden, weil ihre Summe immer gegeben ist (§. 80.).

§. 85.

Unter den Vierecken oder Polygonen von vier Seiten, bezeichnet man besonders mit dem Nahmen des **Parallelogramms**, dasjenige, dessen gegenüber stehende Seiten einander parallel sind. ABCD Fig. 45. ist ein Parallelogramm.

Aus dem §. 54. folgt

1) daß jede Diagonale AC und BC das Parallelogramm in zwey gleiche Dreyecke theilt;

2) daß die gegenüber stehenden Seiten AB und DC, AD und BC respectiv gleich sind;

3) daß umgekehrt, wenn jede zwey gegenüber stehende Seiten einer viereckigen Figur gleich, oder wenn zwey entgegen stehende gleich und parallel sind, diese Figur ein Parallelogramm ist.

§. 86. Lehrsatz.

Die beyden Diaonalen AC und BD eines Parallelogramms halbiren einander.

Beweis.

Die Dreyecke AOD und BOC sind gleich (§. 18.);

denn die Seiten AD und BC sind der Annahme nach gleich, die Winkel DAO, OCB sind es ebenfalls als Wechselwinkel gegen die Secante AC und die Parallelen AD, BC, und die Winkel ADO und OBC sind es ebenfalls als Wechselwinkel gegen die Secante BD; mithin ist AO = OC, DO = OB.

§. 87.

Aehnliche Vielecke nennt man diejenigen, deren Winkel gleich, und deren homologe Seiten proportional sind.

§. 88. **Lehrsatz.**

Zwey Polygone ABCDE, abcde Fig. 46., welche aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Dreyecke zusammengesetzt sind, haben ihren Winkel gleich, ihre homologe Seiten proportional, und sind mithin einander ähnlich.

Beweis.

Da die Dreyecke ABC, abc ähnlich sind, so haben sie ihre homologen Winkel gle ch; man hat also

B = b, BAC = bac.

Aus eben der Ursache geben die Deyecke ACE und ace

CAE = cae, CEA = cea;

woraus folgt, daß der aus den Winkeln BAC und CAE bestehende Winkel BAE in der ersten Figur, dem aus den Winkeln bac und cae bestehenden Winkel bae der zweyten Figur gleich ist. Auf eben die Art kann man die Gleichheit der Winkel AED und aed, EDC und edc darthun; was die letzten Winkel BCD und bcd betrifft, so ist offenbar, daß sie einander gleich sind, weil der erste

aus den Winkeln BCA, ACE, ECD, der andre aus den den ersten als homologe Winkel ähnlicher Dreyecke gleichen Winkeln bca, ace, ecd zusammen gesetzt sind.

Bildet man die aus der Aehnlichkeit der Dreyecke ABC und abc, ACE und ace, ECD und ecd entspringende Proportionen, so wird man haben

BC : bc = AB : ab = AC : ac

AC : ac = AE : ae = CE : ce

CE : ce = ED : ed = CD : cd;

da das erste Verhältniß einer jeden Reihe, welches aus den Seiten besteht, die den anliegenden Dreyecken gemein sind, mit dem letzten der vorhergehenden Reihe einerley ist, so sind alle diese Verhältnisse einander gleich; nimmt man nur diejenigen, welche die Seiten der Vielecke enthalten, so kommt

BC : bc = AB : ab = AE : ae = ED : ed = CD : cd,

welches beweist, daß die homologen Seiten proportional sind.

§. 89. Lehrsatz.

Wenn zwey Vielecke ähnlich sind, so sind sie aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Dreyecke zusammengesetzt.

Beweis.

Da nach der Annahme die Winkel des einen Polygons respectiv denen des andern gleich, und die homologen Seiten des ersten denen des zweyten proportional sind, so wird man zuvörderst den Winkel B gleich b haben, und ferner

BC : bc = AB : ab;

woraus folgt, daß die Dreyecke ABC und abc einander ähnlich sind (§ 66.).

Die Winkel BAC und bac werden also einander gleich seyn; wenn man diese nun von den Winkeln BAE und bae, welche als zu den Polygonen gehörig einander gleich sind, abzieht, so werden die Reste CAE und cae gleich seyn; da ferner die ähnlichen Dreyecke ABC und abc, AB : ab = AC : ac und die Polygone AB : ab = AE : ae geben, so wird man haben

AC : ac = AE : ae;

woraus folgt, daß auch die Dreyecke CAE, cae ähnlich sind (§ 66.). Auf eben die Art kann man die Aehnlichkeit aller Dreyecke eines jeden dieser Polygone beweisen, so groß auch die Anzahl dieser Dreyecke seyn mag.

§. 90. Aufgabe.

Auf eine gegebene Linie bc ein Polygon zu setzen, welches einen gegebenen ABCDF ähnlich sey.

Auflösung.

Man setze zuvörderst nach einem der Verfahrungsarten des §. 68. auf die Linie bc ein dem Dreyecke ABC ähnliches Dreyeck abc, welches den Punct a bestimmen wird; um den Punct e zu finden, setze man ferner auf ac ein dem Dreyeck CAE ähnliches cae und so fort. Das Polygon abcde wird dem gegebenen ABCDE ähnlich seyn, weil beyde aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Dreyecke zusammen gesetzt sind.

Wenn man die Seite bc auf BC von C nach b′ trüge, so würde man nur noch nöthig haben, durch den

Punct b′ die Gerade b′a′ der BA parallel zu führen, dann aus dem Puncte a′ die Gerade a′e′ parallel zu AE ꝛc., um die den Dreyecken BCA, ACE ꝛc. respectiv ähnlichen Dreyecke b′Ca′, a′Ce′ zu bilden; das Polygon b′a′e′d′C würde also auf der gegebenen Linie construirt, und dem Polygon BAEDC ähnlich seyn.

§. 91. Anmerkung.

Im Vorhergehenden haben wir alle Diagonalen aus einem und demselben Winkel geführt; man kann indessen die Polygone auf verschiedene andre Arten in Dreyecke zerlegen, und die obigen Sätze erstrecken sich auch auf diese Fälle, von denen einer besonders erwogen zu werden verdient; es ist nehmlich der, wo man alle Winkel des Polygons mit den beyden Endpuncten einer seiner Seiten verbindet. Dieser Fall ist in der Figur 47. vorgestellt, wo man die Puncte C, D, E mit den Puncten A und B dnrch Diagonale verbunden hat.

1) Es ist klar, daß die Lage der drey ersten gegen die Gerade AB bestimmt ist, sobald die Dreyecke ABC, ABD, ABE gegeben sind; und man sieht auf diese Art, daß zur Bestimmung eines Polygons nur eine Anzahl Dreyecke erfordert wird, welche um zwey Einheiten geringer, als die der Seiten des Polygons ist.

2) Man kann ohne Schwierigkeit, beynahe wie in §. 88 und 89. beweisen, daß wenn die Dreyecke ABC und abc, ABD und abd, ABE und abe respectiv ähnlich sind, die Polygone ABCDE und abcde es ebenfalls seyn werden; und daß umgekehrt, wenn die Polys-

gone ähnlich sind, es auch die correspondirenden Dreyecke seyn müssen *).

§. 47. Lehrsatz.

Wenn man in zweyen ähnlichen Vielecken zwey Gerade FG und fg zieht, welche in jedem derselben eine ähnliche Lage haben, das heißt, welche durch die auf den homologen Seiten AB und ab ähnlich liegenden Puncte G und g gehen, und welche mit diesen Seiten die gleichen Winkel FGB und fgb bilden, oder welche in jedem Polygon zwey homologe Seiten in proportionale Theile theilen, so werden diese Geraden den homologen Seiten des Polygons proportional seyn.

Beweis.

Wenn man BG : bg = AB : ab hat, so sind die Dreyecke BGC und bgc ähnlich, weil jedes derselben den

---

*) Die Feldmeßkunst, oder die Kunst Felder aufzunehmen, ist nichts anders als die, auf dem Papiere Vielecke zu entwerfen, welche denen, die die Puncte, deren gegenseitige Lage man wissen will, auf dem Felde bilden, ähnlich sind. Man sieht, daß hierbey am Ende alles darauf hinauskommt, sich diese Puncte durch Dreyecke mit einander verbunden zu denken, und von diesen Dreyecken eine hinlängliche Anzahl Seiten und Winkel zu messen, um nach den Verfahrungsarten des §. 68. auf dem Papiere ihnen ähnliche zeichnen zu können. Dieß ist alles, was sich hiervon sagen läßt, ohne sich ins Detail der zum Messen der Winkel dienlichen Instrumente einzulassen, weil diese Beschreibung in den allgemeinen Büchern nicht gut angebracht wären, indem sie denen, welche sie noch nicht gesehen haben, nicht faßlich, und denen, die sie kennen, überflüßig wären.

zwischen den f proportionalen Seiten liegenden Winkel dem des andern gleich hat; man hat also 1)

BG ; bg = GC : gc,

woraus folgt

BG : bg = AB ; ab.

2)

BCG = bcg und CGB = cgb,

woraus folgt, daß GCF oder BCF — BCG gleich ist gcf oder bcf — bcg, und daß, wenn FGB = fgb, man auch haben wird CGF oder FGB — CGB gleich cgf oder fgb — cgb. Die Dreyecke FCG und fcg werden oft ähnlich seyn und geben

FG : fg = GC : gc oder = AB : ab,

weil man oben gefunden hat GC : gc = AB : ab.

Wenn man statt der Gleichheit der Winkel FGB und fgb diese Proportion vorausgesetzt hätte BG : bg = FC : fc, so würden die Dreyecke FCG und fcg dann ähnlich seyn, weil sie einen zwischen den proportionalen Seiten liegenden Winkel gleich haben; man wird dieselben Schlüsse wie oben haben, und in diesem Falle die Gleichheit der Dreyecke FGB und fgb beweisen können.

§. 93. Lehrsatz.

Die Umkreise zweyer ähnlichen Polygone verhalten sich gegen einander wie die ähnlich liegenden Seiten dieser Polygone.

Beweis.

Da man für die ähnlichen Polygone ABCDE, abcde folgende Reihe gleicher Verhältnisse hat:

AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AE : ae,

so kann man daraus herleiten

$$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab,$$

daß heißt, daß

der Umfang ABCDE : Umfang abcde = AB : ab.

Von der geraden Linie und dem Kreise.

§. 94.

Wir haben im §. 28. gezeigt, daß man aus einem und demselben Puncte nach einer gegebenen Linie keine drey gleiche Linien ziehen kann; hieraus folgt offenbar, daß eine gerade Linie und ein Kreis einander in nicht mehr als zweyen Puncten schneiden können.

Jede Gerade, welche den Umkreis des Zirkels schneidet und außerhalb desselben verlängert wird, heißt eine Secante. EF Fig. 48. ist eine Secante.

Der innerhalb des Zirkels liegende Theil CD dieser Geraden wird eine Sehne, Chorde genannt.

§. 95.

Man sagt, daß die Sehne CD, welche durch die äußersten Puncte irgend eines Kreisbogens CGD geht, diesen Bogen unterstützt, oder daß der Bogen auf dieser Sehne steht. Man muß aber in Erwägung ziehen, daß dieselbe Gerade zugleich die Sehne des Bogens CHD ist, welche mit CGD zusammen genommen den ganzen Umkreis ausmacht. Wenn also der erste Bogen kleiner als der halbe Umkreis ist, so muß der zweyte nothwendigerweise größer seyn.

§. 96.

§. 96.

Wenn eine Sehne durch den Mittelpunct des Zirkels geht, so giebt man ihr den Nahmen des Diameters, Durchmessers. Die Gerade AB, welche durch den Mittelpunct O geht, ist ein Durchmesser.

Alle Durchmesser des Zirkels sind einander gleich, weil sie aus zweyen Halbmessern zusammen gesetzt sind, und weil alle Halbmesser einander gleich sind.

Es ist klar, daß der Durchmesser die grösste aller Linien ist, welche man im Kreise ziehen kann, weil jede andre Sehne CD kleiner als die Summe der nach ihren Endpuncten geführten beyden Halbmesser ist (§. 15.).

§. 97.

Der Durchmesser AB theilt den Umkreis in zwey gleiche Theile; denn wenn man die Figur längs der Geraden AB herum dreht, so muß der Theil AGB des Umkreises auf den Theil AHB fallen, ohe welches alle Puncte des einen und des andern nicht vom Mittelpuncte gleich entfernt waren.

Dieselben Schlüsse beweisen auch, daß zwey mit einerley Halbmesser beschiebene Kreise einander gleich sind; denn wenn man sie mit ihren Mittelpuncten aufeinander legt, so muß der Umkreis des einen mit dem des andern völlig auf einander fallen, wie es die Natur des Kreises erfordert.

§. 98. Lehrsatz.

Wenn man irgend einen Kreisbogen auf einen andern Bogen desselben Zirkels, oder eines mit demselben

Halbmesser beschriebenen Zirkels dergestalt trägt, daß irgend zwey Puncte des einen dieser Bogen auf den andern fallen, und daß die Aushöhlungen dieser Bogen nach einerley Seite gerichtet sind, so wird der kleinere dieser Bogen in seiner ganzen Ausdehnung auf den größern liegen.

Beweis.

Wenn man A′C′ Fig. 49. auf AE trägt, indem man den Punct A′ auf A legt, und der Punct C′ auf C fällt, so wird die Sehne A′C′ die AC genau decken; und da die Halbmesser O′A′ und O′C′ den Halbmessern OA und OC gleich sind, so wird sich der Punct O′ in O befinden (§. 20.); nun müssen auch alle Puncte des Bogens A′C′ auf die des Bogens AC fallen, weil die ersten vom Mittelpunct O′ eben so weit entfernt sind, als die andern vom Puncte O liegen; es muß also der Bogeu A′C′ mit dem Bogen AC zusammen fallen *).

§. 99. Zusatz.

Hieraus folgt, daß in einem und demselben Kreise, oder in zweyen mit einerley Halbmesser beschriebeneu Kreisen die Bogen, deren Sehnen gleich sind, es eben-

---

*) Die oben bewiesene Eigenschaft des Umkreises des Zirkels ist um so merkwürdiger, da sie zu dieser Curve und zur geraden Linie gehört, und da sie die Aehnlichkeit aller Theile des Umkreises des Zirkels, oder die Einförmigkeit seiner Krümmung vor Augen legt. Dieses bewog mich diesen Satz ganz anders vorzutragen, als man ihn in den gewöhnlichen Elementarbüchern vorträgt, welcher den Gegenstand des folgenden Zusatzes ausmacht.

falls seyn müssen, wofern sie immer von einerley Art sind, das heißt, wenn sie beyde entweder kleiner oder beyde größer als der halbe Umkreis sind. In der That werden, wenn die Sehnen, wie im vorhergehenden Fall, aufeinander gelegt werden, die Bogen einander genau decken.

Der umgekehrte Satz ist ebenfalls wahr; das heißt: wenn zwei Bogen in einem und demselben Kreise oder in zweyen mit einerley Halbmesser beschriebenen Kreisen einander gleich sind, so sind auch ihre Sehnen gleich; denn wenn die Bogen aufeinander gelegt werden und sich genau decken, so müssen die Endpuncte des ersten mit denen des zweyten zusammen fallen. Wenn also A′C′ dergestalt auf AC gelegt wird, daß A′ auf A und C′ auf C zu liegen kommt, so werden die Geraden A′C′ und AC, welche sich genau decken, einander gleich seyn.

§. 100. Lehrsatz.

In einem und demselben Kreise, oder in zweyen gleichen Kreisen hat der größere Bogen eine größere Sehne und umgekehrt (wofern anders die mit einander verglichenen Bogen immer kleiner als der halbe Umkreis sind.

Beweis.

1) Wenn der Bogen AE größer als der Bogen AC ist, so wird auch offenbar der Winkel AOE größer als der Winkel AOC seyn, und nach §. 19. wird die Seite AE des Dreyecks AOE größer als die Seite AC des Dreyecks AOC seyn, weil diese Dreyecke zwey Seiten stückweise gleich haben.

2) Wenn die Sehne AE größer als die Sehne AC ist, so wird der Winkel AOE größer als der Winkel AOC seyn; der Bogen AE wird also den Bogen AC übertreffen.

§. 101. Aufgabe.

Wenn zwey Bogen eines und desselben Kreises oder zweyer gleichen Kreise gegeben sind, das Verhältniß ihrer Längen zu finden.

Auflösung.

Es ist klar, daß sich die vorgelegte Aufgabe eben so wie die im §. 5. auflösen lassen würde, wenn man wirklich die beyden Kreisbogen so aufeinander tragen könnte, wie es in Rücksicht der Geraden geschehen ist; da aber ein ähnliches Aufeinanderlegen in der Ausübung nicht statt finden kann, so hat man es durch die der Sehnen ersetzt, welche, wenn sie gleich sind, zu gleichen Bogen gehören. Die Sehne des Bogens CD Fig. 50. kann zwey Mahl auf den Bogen AB von A in E getragen werden, und der solchergestalt bestimmte Bogen AE wird aus zweyen Theilen Ad und dE zusammengesetzt seyn, deren jeder der CD gleich ist; man wird also haben

$$AB = 2CD + EB.$$

Man nehme dann die Sehne des Restes EB, um sie auf den Bogen CD von C in F zu tragen, welches ein Mahl geschehen kann und den Bogen FD zum Rest läßt; woraus folgt

$$CD = EB + FD.$$

Endlich kann die Sehne des zweyten Restes FD vier

Mahl auf den ersten EB getragen werden, und man wird haben

$$EB = 4FD.$$

Gehl man von diesem letztern Werth auf den der vorhergehenden Bogen zurück, so wird man haben

$$EB = 4FD, \quad CD = 5FD, \quad AB = 14FD;$$

da das gemeinschaftliche Maaß FD der beyden Bogen AB und CD im ersten 14 Mahl und im zweyten 5 Mahl enthalten ist, so kann man daraus schließen, daß sich die vorgelegten Bogen wie die Zahlen 14 und 5 verhalten.

Die Operation ist hiermit, so wie beym Fall der geraden Linien beendigt, so bald man einen Rest gefunden hat, der im vorhergehenden eine Anzahl Mahl genau enthalten, oder der so beschaffen ist, daß der folgende Rest seiner Kleinheit wegen ganz außer Acht gelassen werden kann *).

§. 102. Anmerkung.

Wenn man sich vorstellt, daß eine den Kreis in den beyden Puncten A und B schneidende Linie AB Fig. 51. sich um einen dieser Puncte, z. B. um A herum dreht, und indem sie außerhalb des Zirkels zu kommen begriffen ist, eine Lage wie AB′ annimmt, so sieht man, daß die Durchschnittspuncte der Geraden und des Kreises einander unaufhörlich nähern, und daß es endlich eine

---

*) Diese Art, das Verhältniß zweyer Kreisbogen zu bestimmen, befindet sich in den Memoiren der Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1724, Seite 250.

letzte Lage AC giebt, in welcher diese beyden Puncte aufeinander fallen, und die Gerade nur einen einzigen Punct mit dem Kreise gemein hat, oder ihn berührt. In dieser Lage ist AB eine **Tangente, Berührungslinie** des Kreises.

§. 103. Lehrsatz.

Die von einem Puncte des Umkreises des Zirkels auf den durch diesen Punct gehenden Halbmesser geführte senkrechte, ist eine Tangente des Kreises; und umgekehrt ist die Tangente irgend eines Punctes des Umkreises auf den durch diese Puncte geführten Halbmesser senkrecht.

Beweis.

Alle Puncte der auf dem Halbmesser AO Fig. 52. im Puncte A senkrechten AB sind vom Mittelpuncte O weiter entfernt als der Punct A, weil alle von der einen oder der andern Seite von A dahin gezogenen Linien, wie OB und OC auf dieselbe schief fallen, und also nothwendigerweise größer als AO sind (§. 28.). Die Puncte C und B liegen folglich außerhalb des Zirkels, und die Linie AB, welche nur den einzigen Punct A mit dem Umkreise DA gemein hat, ist eine Tangente.

Es ist auch leicht einzusehen, daß die Tangente des Punctes A keine andre als die auf AO senkrechte AB seyn kann; denn da diese Tangente mit dem Umkreise nur den einzigen Berührungspunct A gemein hat, und alle ihre Puncte vom Mittelpuncte weiter als dieser entfernt liegen, so folgt, daß der Halbmesser AO die kürzeste Linie ist, welche man vom Mittelpuncte nach der

Tangente führen kann, und daß er folglich auf dieser Tangente senkrecht ist.

§. 204. Zusatz.

Hieraus folgt, daß einem im Umkreise eines Zirkels DAE gegebenen Punct A eine Tangente führt, wenn man AB auf den äußersten Punct des durch diesen Punct gehenden Halbmessers senkrecht errichtet.

§. 105. Lehrsatz.

Jede auf der Mitte einer Sehne AB Fig. 53. senkrecht errichtete Gerade CD, geht durch den Mittelpunct O des Kreises, und durch die Mitte C des auf dieser Sehne stehenden Bogens.

Beweis.

Da nach der Annahme CD auf der Mitte von AB senkrecht steht, so muß sie durch alle von den Puncten A und B gleich weit abstehenden Puncte A und B gehen; und der Mittelpunct O ist einer dieser Punkte, weil er von den beyden Puncten A nnd B, die auf dem Umkreise des Zirkels ACB liegen, gleiche Entfernung hat. Da der Punct C, in welchem CD den Umkreis trifft, von den äußersten Puncten A und B des Bogens ACB gleich weit entfernt liegen, so müssen die Sehnen AC und BC nothwendigerweise gleich seyn; die von diesen Sehnen unterstützten Bogen sind also ebenfalls gleich (§. 99.); der Punct C wird also die Mitte des Bogens CB seyn; mithin geht die Gerade CD durch den Mittelpunct O und durch die Mitte des auf der Sehne AB stehenden Bogens.

§. 106. Erster Zusatz.

1) Da zwey Puncte zur Bestimmung der Lage einer Geraden hinreichen (§. 3.), und weil die Mitte einer Sehne, der Mittelpunct des Kreises und die Mitte des auf der Sehne stehenden Bogens immer in einer und derselben Geraden liegen, so folgt, daß wenn bekannt ist, daß eine gegebene Gerade durch zwey dieser Puncte geht, daraus geschlossen werden kann, daß sie auch durch den dritten geht.

2) Da man von einem auf einer Geraden gegebenen Puncte, auf eine andre Gerade nur eine einzige senkrechte herablassen kann (§. 32.), so ist aus dem Vorhergehenden ferner klar, daß jede aus dem Mittelpuncte oder aus der Mitte des Bogens auf die dazu gehörige Sehne gefällte senkrechte, auf die Mitte dieser Geraden fallen wird.

§. 107. Zweyter Zusatz.

Es folgt ferner aus dem Vorhergehenden, daß um einen Bogen in zwey gleiche Theile zu theilen, nur von der Mitte der Sehne, auf welcher dieser Bogen steht, eine senkrechte errichtet werden darf, weil diese Senkrechte durch die Mitte des vorgelegten Bogens gehen muß.

§. 108. Lehrsatz.

Die in einem und demselben Kreise zwischen parallelen Sehnen, oder zwischen einer Tangente und einer ihr parallelen Sehne enthaltenen Bogen sind einander gleich.

Beweis.

Wenn die Sehnen BC, DE und die Tangente FG Fig. 54. respectiv parallel sind, und man verbindet den Mittelpunct O und den Berührungspunct A durch einem Halbmesser, so wird dieser Halbmesser, welcher auf der Tangente FG senkrecht ist (§. 103.), es auch auf den Sehnen BC und DE seyn (§. 42.); er wird also die Bogen BAC und DAE in zwey gleiche Theile theilen; und wenn man folglich von den Bogen AB und AC, welche als Hälften des Bogens BAC gleich sind, die als Hälften des Bogens DAE gleichen Bogen AD und AE abzieht, so werden die Reste BD und EC gleich seyn, welches den ersten Theil des vorgetragenen Satzes darthut; die Gleichheit der Bogen AB und AC beweist den zweyten.

§. 109. Lehrsatz.

Wenn man aus den Scheitelpuncten O und O′ zweyer Winkel AOC und A′O′C′ Fig. 55. mit einerley Halbmesser zwey Kreisbogen beschreibt, so ist das Verhältniß der zwischen den Seiten eines jeden Winkels enthaltenen Bogen dem dieser Winkel gleich.

Beweis.

Wenn die beyden Bogen AC und A′C′ ein gemeinschaftliches Maaß AB = A′B′ haben, so wird man, wenn dieses gemeinschaftliche Maaß auf jeden derselben, so oft es sich thun läßt, getragen wird, jeden derselben in eine Anzahl gleicher Theile theilen; und wenn man die verschiedenen Theilungspuncte mit dem Scheitel des correspondirenden Winkels durch gerade Linien, wie OB

und O′B′, verbindet, so wird man die Winkel AOC und A′O′C′ in so viele gleiche Theile theilen, als die Bogen AC und A′C′ deren enthalten.

Denn, da die Sehnen AB und A′B′ gleich sind, so werden die Dreyecke AOB und A′O′B′, welche alle Seiten gleich haben, indem die Geraden OA, OB, O′A′ O′B′ als Halbmesser gleicher Kreise gleich sind, ebenfalls einander gleich seyn. Dieses vorausgesetzt, werden die vorgelegten Winkel AOC und A′O′C′, welche respectiv aus so vielen dem AOB gleichen Winkeln zusammen gesetzt sind, als AC und A′C′ der AB gleiche Theile enthalten, sich offenbar wie diese Bogen verhalten, und den Winkel AOB zum gemeinschaftlichen Maaße haben.

Die vorhergehenden Schlüsse setzen voraus, daß AC und A′C′ gegen einander commensurable seyen; allein der Satz ist auch dann wahr, wenn sie selbst incommensurable sind; denn man kann nicht annehmen, daß die Winkel AOC und A′O′C′ Fig. 55. ein größeres oder kleineres Verhältniß als das ihrer Bogen zu einander haben.

Wenn man z. B. statt dieser Proportion

$$AOC : A'O'C' = AC : A'C'$$

folgende hätte

$$AOC : A'O'C' = AC : Ad,$$

wo der Bogen Ad größer als A′C′ ist, und den Bogen AC in eine Anzahl Theile theilen würde, welche klein genug wären, damit wenn sie auf A′C′ getragen werden, einer der Theilpuncte e zwische C′ und d fallen, so würde man zwischen den Winkeln AOC, A′O′e und den Bogen

AC und A′e, welche respectiv commensurable sind, diese Proportion haben:

$$AOC : A'O'e = AC : A'e,$$

deren vordere Glieder mit denen der vorhergehenden einerley, welche folglich

$$A'O'C' : A'O'e = A'd : A'e$$

geben würde, welches ungereimt ist, weil $A'O'C' < A'O'e$, und $A'd > A'e$.

Nähme man den Bogen A′d′ kleiner als A′C′, so würde man ebenfalls haben

$$AOC : A'O'C' = AC : A'd';$$

denn für den Theilpunct e′ würde man haben

$$AOC : A'O'e' = AC : A'e'$$

woraus wie oben folgen würde

$$A'O'C' : A'O'e' = A'd' : A'e',$$

noch immer ein ungereimtes Resultat, weil

$$A'O'C' > A'O'e', \quad A'd' < A'e'.$$

Es ist klar, daß dieser Satz umgekehrt keines besondern Beweises bedarf; denn das Verhältniß der Bogen kann nicht dem der Winkel gleich seyn, ohne daß dies letztere dem der Bogen gleich sey.

§. 110. Erster Zusatz.

Da das Verhältniß der Bogen AC und A′C′ dem der Winkel AOC und A′O′C′ gleich ist, so folgt, daß diese Bogen die natürlichsten Maaße der Winkel sind; und in diesem Sinne sagt man, daß das Maaß eines Winkels, der aus seinem Scheitel, als aus einem Mittelpuncte, zwischen seinen Schenkeln beschriebene Kreisbogen ist. Dieser Ausdruck könnte anfangs

ungereimt scheinen; denn man kann eine Größe nur durch eine ihr gleichartige messen. Da der Bogen eine Linie ist, so ist er mit dem Winkel, der eine Fläche ist, nicht gleichartig; allein man muß in Erwägung ziehen, daß man sich hierbey einen Bogen und den diesem Bogen correspondirenden Winkel als Einheit genommen denken muß, und daß der obige Vortrag auf folgenden zurück kommt: Ein jeder Winkel enthält einen andern willkührlich als Einheit genommenen Winkel so viel Mahl, als der aus seinem Scheitel als Mittelpunct zwischen seinen Schenkeln beschriebene Bogen, den zwischen den Schenkeln des andern Winkels aus seinem Scheitel als Mittelpunct beschriebenen Theil eben dieses Kreises enthält.

Man sieht hieraus, daß die Kreisbogen nur zur Vergleichung der Winkel eingeführt sind, und daß man, um das Zahlenverhältniß irgend zweyer Winkel zu finden, nach §. 101. das Verhältniß der aus ihren Scheiteln, als aus Mittelpuncten, mit einem zwar willkührlichen aber bey beyden gleichen Halbmesser zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Kreisbogen suchen muß.

Der Winkel, welcher am schicklichsten als Einheit genommen werden zu können scheint, ist der rechte. Dieser Winkel faßt offenbar zwischen seinen Schenkeln den vierten Theil des Umkreises; denn wenn man aus dem Puncte O Fig. 56. einen Umkreis beschreibt, so wird die Hälfte desselben auf der Geraden AB stehen (§. 97); die beyden rechten Winkel COB, COA, welche einander gleich sind, fassen jeder die Hälfte dieser Hälfte (vorherg. §.), das heißt, den vierten Theil des ganzen Um-

Kreises. Man wird also das Maaß eines Winkeln haben, wenn man den zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Bogen mit demjenigen vergleicht, welchen der rechte Winkel von eben dem Kreise zwischen seinen Schenkeln faßt, wenn sein Scheitel als Mittelpunct nimmt.

§. 111. Zweyter Zusatz.

Es folgt ferner aus dem vorhergehenden Satze, daß die Linien, welche einen Bogen in verschiedene gleiche Theilen, auch den von diesem Bogen gemessenen Winkel in eine eben so große Anzahl Theile theilen, und daß sich folglich die Theilung eines Winkels auf die des diesem Winkel zum Maaße bienenden Bogens reducirt. Unglücklicherweise giebt die elementare Geometrie nur die Mittel einen Bogen in zwey gleiche Theile zu theilen.

Dieses Mittel besteht darin (§. 107.) aus der Mitte der Sehne AB Fig. 53. eine senkrechte CO zu errichten, und diese senkrechte wird auch den Winkel AOB in zwey gleiche Theile theilen. Man kann sich überdieß von der Gleichheit der Winkel AOD und BOD à priori durch die der gleichnahmigen Dreyecke überzeugen.

Durch dasselbe Mittel kann man jede Hälfte des Bogens ACB oder des Winkels AOB von neuem in zwey gleiche theilen, und so die Theilung nach den Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64 ꝛc. fortsetzen; es ist aber unmöglich diesen Bogen oder Winkel in 3, 5 ꝛc. gleiche Theile zu theilen.

§. 112. Lehrsatz.

Wenn ein Winkel seinen Scheitel im Umkreise des

Zirkels hat, so hat er zu seinem Maaße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens.

Beweis.

1) Wir wollen annehmen, der vorgelegte Winkel sey der Winkel ABC, dessen eine Seite AC durch den Mittelpunct O des Kreises Fig. 57. geht. Wenn man durch diesen Punct den Durchmesser DE zu AB parallel führt, so wird der Winkel DOC den ABC als correspondirend gegen die Secante AC gleich seyn, und dieser hat den aus seinem Scheitel, als aus einem Mittelpunct, zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Bogen AC zu seinem Maaße. Es würde also auch der Winkel BAC den Bogen DC zum Maaße haben, wenn sein Scheitel A in O übertragen werden möchte; nun ist DC den Bogen AE gleich, weil dieser letztere das Maaß des dem Winkel DOC als Scheitelwinkel gleichen Winkels AOE ist; und da ferner die zwischen parallelen Sehnen liegenden Bogen AE und BD ebenfalls gleich sind (§. 118.), so folgt, daß der Bogen DC auch dem BD gleich; der aus BD und DC zusammengesetzte Bogen BC enthält also den Bogen DC zwey Mahl; er ist also das doppelte Maaß des Winkels BAC.

2) Wir wollen nun zum Winkel BAG übergehen, der den Mittelpunct zwischen seinen Schenkeln hat. Da dieser Winkel aus den Winkeln BAC, CAG zusammengesetzt ist, so wird er zu seinem Maaße die Summe der diese letztern messenden Bogen haben; da aber bey jedem derselben ein Schenkel durch den Mittelpunct geht, so werden ihre Maaße respectiv die Hälfte des Bogens BC

und die Hälfte des Bogens CG seyn, und die Summe dieser Bogen macht die Hälfte des der Summe BC + CG gleichen Bogens BG aus; der Winkel BAG wird also zu seinem Maaße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Bogens BG haben.

3) Da der Winkel FAB, welcher den Mittelpunct nicht zwischen seinen Schenkeln hat, als die Differenz der Winkel FAC, BAC betrachtet werden kann, so wird er zu seinem Maaße die Differenz der diese letztern messenden Bogen haben; da aber der beyden gemeinschaftliche Schenkel AC durch den Mittelpunct geht, so sind ihre respectiven Maaße die Hälfte von FC und die Hälfte von BC; und die Differenz dieser Maaße macht die Hälfte des der Differenz FC — BC gleichen Bogens FB aus; der Winkel FAB wird also zum Maaße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens haben.

4) Der aus der Tangente und einer Sehne gebildete Winkel hat ebenfalls die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens zum Maaß. Denn da der von der Tangente AH und dem darauf senkrechten Durchmesser AC gebildete Winkel CAH ein rechter ist, so hat er zu seinem Maaße die Hälfte des halben Umkreises ABC (§. 110.); setzt man nun zu diesem Winkel den von zweyen Sehnen gebildeten Winkel CAG hinzu, der zu seinem Maaße die Hälfte des Bogens CG hat, so wird der ganze Winkel GAH die Hälfte von CG nebst der von ABC, zu seinem Maaße haben, welches die Hälfte des ganzen zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens ABG ausmacht; und wenn man von eben diesem rechten Winkel CAH den von der Hälfte des Bo-

gens FC gemessenen Winkel FAC abzieht, so wird die Differenz FAH dieser Winkel von der der Hälften von ABC und von FC, oder von der Hälfte von AF gemessen werden.

§. 113. Erster Zusatz.

Der von der Sehne AF und der Verlängerung AI der Sehne AG gebildete Winkel FAI, hat zu seinem Maaße die Hälfte der Summe der auf diesen Sehnen ruhenden Bogen (welche aber kleiner als der Halbkreis genommen werden müssen).

Denn der Winkel FAI, welcher zweyen rechten weniger FAG gleich ist (§. 11.) wird zu seinem Maaße die Differenz zwischen der Hälfte des Umkreises und der Hälfte des den Winkel FAG messenden Bogens FG haben; da aber diese Differenz der Hälfte der Differenz zwischen dem ganzen Umkreise und dem Bogen FG selbst gleich ist, so kommt das Vorhergehende offenbar auf die halbe Summe der Bogen AF und AEG zurück.

§. 114. Zweyter Zusatz.

Es folgt ferner aus dem vorhergehenden Lehrsatze,

1) daß alle Winkel, welche wie EGF, EHF, EIF, KEF Fig. 58. ihre Scheitel im Umkreise haben, und auf einerley Bogen stehen, einander gleich sind, weil sie alle zu ihrem Maaße die Hälfte des zwischen ihren Schenkeln enthaltenen Bogens EAF haben.

2) Daß der Winkel BAC, dessen Scheitel im Umkreise, und dessen Schenkel AB und AC durch die äußersten Puncte des Durchmessers BC gehen, ein rechter ist, weil er zu seinem Maaße die Hälfte des zwischen seinen

Seiten

Seiten liegenden halben Umkreises BGC, oder den vierten Theil des ganzen Umkreises hat (§. 110.).

§. 115. Lehrsatz.

Der Winkel BAC Fig. 61., dessen Scheitel innerhalb des Zirkels zwischen dem Mittelpuncte und dem Umkreise liegt, hat zu seinem Maaße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens BC, nebst der Hälfte des zwischen ihren Verlängerungen liegenden Bogens ED.

Beweis.

Wenn man vom Puncte D die Chorde DF zu einem der Schenkel AC des vorgelegten Winkels parallel führt, so wird der dem BAC gleiche Winkel BDF gebildet, welcher mit dem vorhergehenden in Rücksicht der Secante BD correspondirt, und zum Maaße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens BCF hat, weil sein Scheitel auf dem Umkreise liegt (§. 112.); da aber die Bogen ED und FC, welche zwischen zweyen parallelen Sehnen liegen, einander gleich sind (§. 108.), so folgt, daß der der Summe BC + FC gleiche Bogen BF auch der Summe BC + FD gleich seyn wird; und da seine Hälfte den Winkel BDF und folglich den ihm gleichen BAC mißt, so wird auch dieser letztere die halbe Summe der Bogen BC und ED, welche dem Bogen BF gleich ist, zum Maaße haben, wie es der Vortrag der Aufgabe angiebt.

§. 116. Lehrsatz.

Der Winkel BAC Fig. 60., dessen Scheitel außerhalb des Kreises liegt, hat zu seinem Maaße die halbe

Differenz der zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen BC und DE, von denen der erste die hohle, und der andre die erhabene Seite dem Scheitel zuwendet.

Beweis.

Wenn man wie oben durch den Punct D die Gerade DF zum Schenkel AC parallel führt, so bildet man den Winkel BDF, welcher dem BAC als correspondirend gegen die Secante BD gleich ist, und zum Maaße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens BF hat (§. 112.); da aber die Bogen ED und FC, als zwischen zweyen Parallelen liegende gleich sind (§. 108.), so folgt, daß der der Differenz BC — FC gleiche Bogen BF, es auch der BC — ED seyn wird; und da seine Hälfte das Maaß des Winkels BDF, und folglich des ihm gleichen Winkels BAC ist, so wird dieser letztere auch die halbe Differenz der Bogen BC und ED, welche Differenz dem Bogen BF gleich ist, zum Maaße haben.

§. 117. Aufgabe.

Von dem äußersten Puncte einer geraden Linie AB Fig. 58. eine auf derselben senkrechte zu errichten, ohne sie erst zu verlängern, wie es das Verfahren des §. 30. erfordert.

Auflösung.

Man nehme außerhalb der Linie AB einen beliebigen Punct O, aus welchem man als aus einem Mittelpuncte, mit einem der AO gleichen Halbmesser den Umkreis eines Zirkels BAH beschreibt. Durch den Punct B, in welchem dieser die Gerade AB trifft, und durch

den Mittelpunct O, ziehe man den Durchmesser BOC, welcher auf dem Umkreise einen Punct C bestimmen wird. Die Gerade AC, welche diesen Punct mit dem äußersten Punct A der Geraden AB verbindet, wird die verlangte senkrechte seyn, weil der Winkel BAC ein rechter seyn wird (§. 114.).

§. 118. Aufgabe.

Von einem außerhalb des Kreises Fig. 59. gegebenen Puncte A diesem Kreise eine Tangente zu führen.

Auflösung.

Man verbinde A mit dem Mittelpuncte O des gegebenen Kreises, und beschreibe auf AO als einem Durchmesser den Umkreis eines Zirkels, welcher den Kreis BDB′ in zweyen Puncten B und B′ schneiden wird; die Geraden BA und B′A, welche diese Puncte mit dem Puncte A verbinden, werden Tangenten des Kreises BDB′ seyn.

Denn wenn man in diesem Kreise die Halbmesser BO und B′O zieht, welche Sehnen des Kreises BB′A seyn werden, so werden die Winkel OBA und OB′A rechte seyn, weil ihre Scheitel im Umkreise dieses letztern, und ihr Schenkel durch die äußersten Puncte eines seiner Durchmesser gehen (§. 114); es sind also die Geraden AB und AB′ Tangenten des Kreises BDB′ seyn (§. 103.).

§. 119. Lehrsatz.

Durch drey Puncte A, B, C Fig. 62., welche nicht in einer geraden Linie liegen, kann man nur den Umkreis eines einzigen Zirkels legen.

Beweis.

Wenn man die drey Puncte A, B, C durch drey gerade Linien AB und AC verbindet, so werden diese Geraden Sehnen des durch diese Puncte gehenden Kreises seyn. Errichtet man nun aus der Mitte von AB die senkrechte DE, und aus der Mitte von BC die senkrechte FG, so kann der Mittelpunct O, der zu gleicher Zeit auf jeder derselben liegen muß (§. 105.), sich nur in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte befinden, welches nach §. 41. nothwendigerweise geschehen muß; man wird also nur einen einzigen Mittelpunct erhalten.

Desgleichen wird man nur einen einzigen Halbmesser erhalten; denn die Geraden AO und OC, welche als schiefe von den senkrechten OD und OF gleich weit abstehende Linien der OB gleich sind, auch einander gleich seyn müssen.

Es ist also klar, daß nur ein einziger Kreis durch die drey Puncte A, B, C gehen kann, und daß dieser Kreis durch die obige Construction gefunden wird.

§. 120. Erster Zusatz.

Hieraus folgt, daß man, um den Mittelpunct eines durch drey gegebene Puncte gehenden Kreises zu finden, diese drey Puncte durch zwey Gerade AB und BC verbinden, und aus der Mitte einer jeden die senkrechten DE, FG errichten muß, deren Durchschnitt O den Mittelpunct O des verlangten Kreises geben, und worin eine der Entfernungen AO, BO, CO der Halbmesser seyn wird.

Die Aufgabe wird unauflösbar, wenn die drey

Puncte A, B, C auf einer und derselben geraden Linie liegen, wird die senkrechten DE und GF parallel sind, und da sie sich nirgends schneiden, so werden sie auch keinen Mittelpunct angeben; und in der That kann kein Zirkel durch die drey vorgelegten Puncte gehen; denn wenn einer durch ginge, so würde dieser Kreis mit einer Geraden drey Puncte gemein haben, welches gegen den im §. 94. bewiesenen Satz ist.

§. 121. Zweyter Zusatz.

Es folgt ferner aus eben demselben Satze, daß zwey Kreise keine drey Puncte gemein haben können, ohne auf einander zu fallen; denn wenn man die im Lehrsatze angezeigte Construction macht, so wird man beweisen können, daß die vorgelegten Kreise einerley Halbmesser, und ihre Mittelpuncte in einem und demselben Puncte haben müssen.

Aus diesem Grunde können zwey Kreise einander in nicht mehr als zweyen Puncten schneiden.

§. 122. Lehrsatz.

Zwey Kreise, welche durch einen und denselben Punct der ihre Mittelpuncte verbindenden Geraden gehen, haben nur diesen Punct gemein, und berühren sich folglich darin; und umgekehrt, wenn zwey Kreise einander berühren, so liegen ihre Mittelpuncte und der Berührungspunct in einer und derselben geraden Linie.

Beweis.

Erster Fall. Wenn die Mittelpuncte O und O' der Kreise AC und AC' Fig. 63. beyde von einer und

derselben Seite des beyden Kreisen auf der Geraden OO′ gemeinschaftlichen Punctes A liegen, so wird, wenn man auf dem von beyden, welcher den größten Halbmesser hat, einen Punct M′ nimmt, und diesen Punct mit den Mittelpuncten O und O′ verbindet, das Dreyeck O′OM′ gebildet, in welchem man immer haben wird

$$OO' + OM' > O'M' \text{ oder } O'O + OM > O'A;$$

da aber $O'A = O'O + AO$, so kann man daraus schließen

$$OO' + OM' > OO' + O'A,$$

und folglich $OM' > OA$; der Punct M′ wird also in jedem Falle außerhalb des Kreises AC liegen.

Zweyter Fall. Wenn die Mittelpuncte von verschiedenen Seiten des Punctes A wie in O und O″ fallen, so wird das Dreyeck OM″O″

$$OM + O''M'' > OA + O''A'$$

mithin

$$OM'' > OA$$

geben, weil $O''A = O''M''$; es wird folglich der Punct M″ außerhalb des Kreises AC liegen.

Der umgekehrte im Vortrage begriffene Satz läßt sich einsehen, wenn man in Erwägung zieht 1) daß, wenn zwey Kreise, die nur den einzigen Punct A gemein haben, ihre Mittelpuncte nicht auf OA, sondern auf irgend einer andern Geraden O′M′ hätten, so daß der Mittelpunct des kleinern Zirkels sich in o befände, alsdann seyn würde

$$O'o + oA > O'A \text{ oder } > O'M';$$

zieht man beyderseits O′o ab, so kommt

$$oA > oM',$$

welches unmöglich ist, weil oA, welche als Halbmesser des Kreises AC angenommen ist, der om gleich, und daher nothwendigerweise kleiner als OM' ist.

2) Daß wenn die beyden Kreise sich außerhalb berühren, wie AC und AC'', so ist klar, daß die kürzeste Linie, welche man vom Mittelpuncte des einen nach dem des andern ziehen kann, der Summe der Halbmesser gleich ist, und daß diese kürzeste Linie auch durch den Berührungspunct geht, weil wenn man den Punct M'' mit jedem der Mittelpuncte verbindet, die Summe der Geraden OM'', O''M'' größer, als die der Halbmesser seyn würde; da nun die kürzeste Linie, welche zwischen zweyen Puncten gezogen werden kann, eine gerade ist, so wird auch OAO'' eine Gerade seyn.

§. 123. Anmerkung.

Wir haben schon im §. 22. die Bedingungen auseinander gesetzt, welche erforderlich sind, und daß zwey Kreise einander schneiden können; durch den vorhergehenden Lehrsatz sind sie von neuem bestätigt; denn man sieht offenbar, daß die beyden Kreise AC und AC' aufhören würden sich zu berühren, und um so mehr einander zu schneiden, wenn der Abstand der Mittelpuncte OO' kleiner als die Differenz der Halbmesser wäre, und daß sie eben so wenig einander berühren würden, wenn der Abstand OO' die Summe der Halbmesser beyder Kreise AC und AC'' übertreffen würde.

Da die Kreise AC, AC', AC'' ihren Mittelpunct und ihren Berührungspunct A auf einer und derselben geraden Linie haben, so wird die durch den Punct A

auf dieser Linie errichtete senkrechte AB alle zugleich berühren (§. 103.).

Es ist ferner klar, daß, ob es gleich unmöglich ist, zwischen dem Kreise und seiner Tangente eine gerade Linie zu legen, dennoch dazwischen eine unendliche Anzahl verschiedener Kreise gezogen werden kann *).

§. 124. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine der Lage nach gegebene Gerade AB in einem gegebenen Puncte A berühre, und durch einen andern gegebenen Punct C gehe.

Auflösung.

Man errichte auf AB aus dem Puncte A die senkrechte AO; man verbinde dann A und C durch eine ge-

---

*) In diesem Sinne ist der von verschiedenen Geometern aufgestellte Satz zu nehmen, daß nehmlich der vom Kreise und seiner Tangente gebildete Winkel CAB kleiner als jeder geradlinichte oder aus zweyen geraden Linien gebildete Winkel sey, so klein auch dieser letztere seyn mag. Der öffentliche Streit hierüber rührte bloß davon her, daß man sich nicht an dem Sinne hielt, den man in diesem Falle mit dem Worte Winkel verband. Diejenigen, welche darauf die von den geraden Linien hergeleiteten Begriffe anwenden wollten, konnten, da sie in gedachtem Winkel einen unendlichen Raum erblickten, ihn mit Recht nicht für kleiner als jeden geradlinichten Winkel halten, weil man offenbar durch den Punct A eine Gerade ziehen kann, die zwischen den Puncten C und B fällt. Allein dieser ganze Streit, der bloß von den Wörtern herrührte, kam in Vergessenheit, sobald man sich überzeugt hatte, daß er die Principien nicht interessirt.

rade Linie, und errichte aus der Mitte von AC die senkrechte DO′; der gemeinschaftliche Durchschnitt O′ beyder senkrechten, wird der Mittelpunct des gesuchten Kreises seyn.

Denn der Mittelpunct dieses Kreises muß sich auf der auf der Tangente AD senkrechten AO′ befinden, die durch den Punct A geht, in welchem der Berührungspunct des Kreises und der Geraden AB liegen muß (§. 103.); desgleichen muß er auf DO′ liegen, weil diese Linie auf der Mitte von AC senkrecht ist, die, weil sie die beyden Puncte A und C des gesuchten Kreises verbindet, eine Sehne ist (§. 105.); er ist also im Puncte O′, worin diese beyden senkrechten einander schneiden.

§. 125. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen andern gegebenen Kreis AE im Puncte A berühre, und durch einen zweyten gegebenen Punct C gehe.

Auflösung.

Man verbinde, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Puncte A und C durch eine gerade Linie, und die aus der Mitte der Sehne AC′ errichtete senkrechte DO′ wird durch den Mittelpunct des verlangten Kreises gehen; man ziehe dann durch den Mittelpunct O des gegebenen Kreises und durch den Punct A eine Gerade, welche ebenfalls den Mittelpunct des gesuchten Zirkels enthalten muß (§. 11.); der Punct, worin diese gerade Linie, wenn es nöthig ist, verlängert, die Gerade DO′ trifft, wird in diesem Falle der Mittelpunct des gesuchten Kreises seyn.

Wenn der gegebene Punct C in C′ innerhalb des Kreises AE überginge, so würde die Construction von der vorhergehenden nur darin unterschieden seyn, daß der gesuchte Kreis von diesem umgeben werden möchte.

§. 126. Aufgabe.

Auf eine gegebene EF Fig. 58. einen Kreis dergestalt zu beschreiben, daß alle auf einerley Seite derselben liegende Winkel, welche ihre Scheitel im Umkreise haben und an ihre äußersten Puncte anschließen, einem gegebenen Winkel gleich seyen.

Auflösung.

Man lege durch E die gerade KM, welche mit E den Winkel KEF bildet, welche dem gegebenen Winkel gleich sind, und dessen Oeffnung gegen dieselbe Seite der verlangten Winkel gerichtet sey; es kommt alsdann nur noch darauf an, nach §. 124. einen Kreis zu beschreiben, welcher durch den Punct F geht, und die Gerade KM im Puncte E berührt.

Es ist aus §. 114. klar, daß alle Winkel EGF, EKF, EIF, welche mit dem Winkel KEF einerley Maaß haben, dem gegebenen gleich seyn werden.

Anmerkung.

Man pflegt auch diese Aufgabe folgendermaaßen vorzutragen: Auf eine gerade Linie EF eine Segment (einen Theil) des Kreises EHFE zu setzen, welches einen gegebenen Winkel enthält.

§. 127. Lehrsatz.

Zwey Secanten, welche von einem und demselben

außerhalb des Kreises liegenden Punct E Fig. 65. ausgehen, und bis zu dem von diesem Puncte entferntesten Theile des Umkreises verlängert werden, sind ihren ausserhalb liegenden Theilen umgekehrt proportional; das heißt, man hat die Proportion

$$AE : DE = CE : BE,$$

in welcher eine der Secanten und ihr äußerer Theil die mittlern, indeß die andre Secante nebst nebst ihrem ausserhalb liegenden Theil die äußern Verhältnisse bilden.

Beweis.

Wenn man die Sehnen AC und DB zieht, so bildet man die Dreyecke AEC und BED, welche einander ähnlich sind, weil zwey Winkel des einen zweyen Winkeln des andern stückweise gleich sind (§. 65.), nehmlich: den Winkel ACD und den Winkel ABD, deren Scheitel im Umkreise liegen, und welche auf einem und demselben Bogen AD stehen (§. 114.), dann der Winkel AED, welcher ihnen gemein ist; vergleicht man um ihre homologe Seiten, so erhält man die Proportion

$$AE : DE = CE : BE,$$

welche der Gegenstand des vorgetragenen Satzes ist.

§. 128. Anmerkung.

Denkt man sich die Secante EC um den Punct E gegen F zu drehend, um außerhalb des Kreises zu kommen, so werden die Puncte C und D einander immer mehr und mehr nähern, und die Differenz zwischen der Secante und ihrem außerhalb liegenden Theile nimmt immer mehr und mehr ab; da indessen die obige Proportion deshalb nichts von ihrer Wahrheit verliert, so ist

es natürlich daraus zu schließen, daß sie selbst dann Statt haben müsse, wenn diese Differenz Null wird, das heißt, wenn, nachdem die Linie CE in die Tangente EF über gegangen ist, der äußere Theil der ganzen Linie gleich geworden ist. Man wird also in diesem Falle haben

$$AE : EF = EF : BE,$$

eine Proportion, welche lehrt, daß die Tangente EF die mittlere Proportionallinie zwischen der Secante BE und ihrem außerhalb liegenden Theil AE ist. Dieser Satz kann auch folgendermaßen à priori bewiesen werden:

Nachdem man die Sehnen AF und BF Fig. 66. gezogen hat, erhält man die Dreyecke AEF und BEF, denen der Winkel E gemein ist, und in welchen die Winkel EBF und EFA gleich sind, weil ihre Scheitel im Umkreise liegen, und beyde auf einerley Bogen AF stehen. Die Vergleichung ihrer homologen Seiten giebt

$$AE : EF = EF : BE.$$

§. 129. Lehrsatz.

Zwey in einem Kreise sich schneidende Sehnen AB und CD Fig. 67. theilen sich nach dem umgekehrten Verhältniß ihrer Abschnitte; das heißt, man hat

$$AE : DE = CE : BE,$$

eine Proportion, in welcher die Theile der einen Sehne die äußern, und die Theile der andern Sehne die mittlern Glieder bilden.

Beweis.

Wenn man die Sehnen AC und DB zieht, so werden die Dreyecke AEC und BED gebildet, welche einan-

der ähnlich sind, weil sie zwey Winkel stückweise gleich haben (§. 65), nehmlich: den Winkel ACD und den Winkel ABD, deren Scheitel im Umkreise liegen, und welche auf einerley Bogen AD stehen (§. 114.), und dann die als Scheitelwinkel gleichen Winkel AEC und BED. Vergleicht man die homologen Seiten, so erhält man die Proportion

$$AE : DE = CE : BE,$$

welche den Gegenstand des vorgetragenen Satzes ausmacht.

Bemerkung. Es ist leicht einzusehen, daß dieser Satz, und der des §. 127. nur besondre Fälle von dem allgemeinen Satze sind, welchen man folgendermaßen vortragen kann:

Wenn jede von zweyen sich schneidenden geraden Linien zu gleicher Zeit den Umkreis eines Zirkels in zweyen Puncten treffen, so sind die Entfernungen ihres Durchschnittspunctes von denen, in welchen sie den Umkreis des Zirkels schneiden, einander umgekehrt proportional.

§. 130. Zusatz.

Wenn die Sehne AC durch den Mittelpunct ginge, oder ein Durchmesser würde, und die Sehne CD auf ihr senkrecht wäre, Fig. 68., so würde diese letztere in zwey gleiche Theile getheilt seyn (§. 106.), und die Proportion

$$AE : DE = CE : BE$$

würde sich in

$$AE : CE = CE : BE$$

verwandeln, weil DE = CE; die Gerade CE wäre also die mittlere Proportionallinie zwischen den Theilen AE und BE des Durchmessers AB.

Hieraus folgt, daß man, um die mittlere Proportionale zwischen zweyen gegebenen Linien M und N zu finden, sie von A in E und von E in B an einander legen, dann auf ihre Summe AB als einen Durchmesser einen Kreis beschreiben, und aus dem Puncte E, in welchem sie aneinander fassen, die senkrechte EC errichten muß, welche die verlangte mittlere Proportionale seyn wird.

§. 131. Anmerkung.

Der Satz, welcher den Gegenstand des vorhergehenden Zusatzes ausmacht, folgt unmittelbar aus den im §. 74. bewiesenen Eigenschaften des rechtwinklichten Dreyecks; denn wenn die Sehnen AC und CB gezogen werden, so hat man, da der Winkel ACB ein rechter ist (§. 114.), vermöge des citirten §.

$$AE : CE = CE : BE.$$

Derselbe §. giebt auch diese Proportion

$$AE : AC = AC : AB,$$

welche man anwenden kann, um die mittlere Proportionale zwischen zweyen gegebenen Linien zu finden, indem man die größern zum Durchmesser AB nimmt, dann die zweyte von A in E trägt, die senkrechte EC errichtet und die Sehne AC zieht, welche nach dem Vorhergehenden die gesuchte mittlere Proportionale seyn wird.

§. 132. Aufgabe.

Eine Linie AB Fig. 69. nach dem äußern und mittlern Verhältniß zu theilen; das heißt, daß man habe

$$AC : BC = BC : AB,$$

in welcher BC, der größere Theil der Linie AB, die mittlere Proportionale zwischen dieser ganzen und dem andern Theil AC sey.

Auflösung.

Man muß von einem der äußern Puncte der geraden AB eine der Hälfte dieser Linie AB gleiche senkrechte AE errichten, dann BE ziehen; aus dem Puncte E, als aus einem Mittelpuncte, mit dem Halbmesser AE den Kreisbogen FAD, und aus B mit dem Halbmesser BD den Kreisbogen DC beschreiben. Dieser Bogen, welcher die Linie AB im Puncte C schneidet, wird sie nach dem mittlern und äußern Verhältniß theilen.

Um dieß einzusehen, verlängre man BE bis F, und man wird nach §. 128. haben

$$BD : AB = AB : BF,$$

woraus man zieht

$$AB - BD : BF - AB = BD : AB;$$

aber

$$AB - BD = AB - BC = AC;$$

und da nach der Construction AE die Hälfte von AB ist, so folgt, daß

$$AB = 2\,AE = FD,$$

woraus sich ergiebt

$$BF - AB = BF - FD = BD = BC,$$

und folglich

$$AC : BC = BC : AB,$$

welche Proportion mit dem Vortrage der Aufgabe übereinstimmt.

§. 133. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwey gegebene Puncte C und D Fig. 70. gehe, und eine unbegränzte der Lage nach gegebene gerade Linie AB berühre.

Auflösung.

Man verbinde die Puncte D und C durch eine gerade Linie, welche man verlängern kann, bis sie die AB in A schneidet; man nehme dann zwischen AC und AD nach dem im §. 131. gezeigten Verfahren eine mittlere Proportionallinie, und wenn AE diese mittlere Proportionale ist, so trage man sie auf AB, indem man aus dem Puncte A, als aus einem Mittelpuncte, mit dem Halbmesser AE den Kreisbogen EF beschreibt; der Punct F wird der Berührungspunct der Geraden AB und des gesuchten Kreises seyn; man kann also diesen Kreis nach dem im §. 124. gezeigten Verfahren beschreiben.

Diese Auflösung ist leicht zu beweisen, wenn man in Erwägung zieht, daß die Linie AC eine Secante ist, und daß die Aufgabe darauf zurück kommt, auf AB den Berührungspunct zu finden, für welchen man nach §. 128. haben muß

$$AD : AF = AF : AC,$$

woraus folgt, daß der Abstand AF erhalten wird, wenn mann die mittlere Proportionale zwischen AD und AC nimmt *).

§. 134.

---

*) Die Aufgabe dieses, so wie die des vorhergehenden §., ist zweyer Auflösungen fähig. In der ersten erfüllt nicht allein die Linie BD Fig. 69., sondern auch die Linie BF die Bedingun-

§. 134. Lehrsatz.

In einem Halbkreise verhalten sich die zweyten Potenzen der Längen der Sehnen AC, AF, welche vom Durchmesser aus gezogen sind Fig. 68. wie die Abschnitte AE und AG, welche auf dem Durchmesser zwischen dem, beyden gemeinschaftlichen äußern Punct und den Endpuncten der von ihren andern äußern Puncten herabgelassenen senkrechten liegen.

Beweis.

Da die Sehnen AO und AF respectiv mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser AB und jedem der Segmente AE und AG sind (§. 131.), so wird man haben

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE}, \quad \overline{AF}^2 = \overline{AB} \times \overline{AG},$$

woraus folgt

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE} : \overline{AB} \times \overline{AG},$$

---

gungen des Vortrags, da im letztern Falle AB die mittlere Proportionale zwischen BF und BD seyn wird (Siehe die höhere Geomertie).

In der obigen Aufgabe kann man die Linie AE Fig. 70. nicht allein von A in F, sondern auch auf die entgegengesetzte Seite in F′ tragen; man wird also einen zweyten Kreis haben, welcher die Gerade AB im Puncte F′ berühren, und durch die Puncte D und C gehen wird.

Wenn die Linie DC der AB parallel wird, so giebt die angezeigte Construction nicht den Punct F; es ist aber offenbar, daß in diesem Falle die von der Mitte der Sehne DC senkrecht errichtete und durch den Mittelpunct des gesuchten Kreises gehende Linie, welche dann auf der Tangente AB senkrecht wird, den Berührungspunct F bestimmen wird (§. 103.).

welches sich, wenn man den beyden Gliedern der Proportion gemeinschaftlichen Factor AB ausläßt, auf

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 = AE : AG$$

reducirt.

Von den um den Kreis beschriebenen und in demselben eingeschriebenen Vielecken.

§. 135.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, daß man durch jede drey Puncte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis führen kann; hieraus folgt, daß man auch durch die Scheitel der Winkel irgend eines Dreyecks ABC Fig. 71. einen Kreis führen kann; in diesem Falle ist das Dreyeck ABC im Kreise eingeschrieben, und der Kreis ist um das Dreyeck beschrieben.

Diese Eigenschaft des Dreyecks bestätigt die in §. 36, 37 und 51. bewiesenen. 1) Sieht man, daß die Summe der drey Winkel eines Dreyecks zweyen rechten gleich ist; denn jeder derselben hat die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens zu seinem Maasse, und die Summe dieser drey Hälften, welche den halben Umkreis ausmacht, ist das Maaß von zweyen Rechten (§. 110.).

2) Die Gleichheit der Winkel A und B führt die der gegenüberstehenden Bogen CB und AC mit sich, welche respectiv die doppelten von den diese Winkel messenden Bogen sind (§. 112.); die Sehnen der Bogen CB und AC, welche nichts anders als die diesen Win-

keln gegenüber liegenden Seiten sind, werden also ebenfalls gleich seyn (§. 99.). Das Umgekehrte von diesem Satze läßt sich auch leicht beweisen.

3) Da endlich der größere Bogen immer auf einer größern Sehne steht, so folgt offenbar, daß dem größern Winkel in einem Dreyecke die größere Seite gegenüber liegen muß.

§. 136. Aufgabe.

In ein gegebenes Dreyeck ABC Fig. 72. einen Kreis einzuschreiben, das heißt, innerhalb dieses Dreyecks einen Kreis zu beschreiben, der nur die drey Seiten desselben berühre.

Auflösung.

Man theile irgend zwey Winkel dieses Dreyecks, z. B. A und B, in zwey gleiche Theile (§. 111.); der Durchschnittspunct O der Theilungslinien AO und BO wird der Mittelpunct des gesuchten Kreises seyn.

Denn wenn man vom Puncte O auf jede der Seiten AB, AC, BC eine senkrechte fällt, so werden die Dreyecke AEO, ADO (§. 34.), so wie die Dreyecke DOB und BOF einander gleich seyn; denn die ersten sind in D und E rechtwinklicht, und haben die Winkel EAO, DAO, als Hälften des Winkels DAE, gleich, und die Seite AO gemein; die andern in D und F rechtwinklichte haben die Winkel DBO, FBO als Hälften des Winkels DBC gleich, und die Seite BO gemein. Die beyden senkrechten EO und FO sind also der DO gleich, und folglich kann der aus dem Puncte O, als aus einem Mittelpuncte, mit einem der DO gleichen Halb-

§. 133. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwey gegebene Puncte C und D Fig. 70. gehe, und eine unbegränzte der Lage nach gegebene gerade Linie AB berühre.

Auflösung.

Man verbinde die Puncte D und C durch eine gerade Linie, welche man verlängern kann, bis sie die AB in A schneidet; man nehme dann zwischen AC und AD nach dem im §. 131. gezeigten Verfahren eine mittlere Proportionallinie, und wenn AE diese mittlere Proportionale ist, so trage man sie auf AB, indem man aus dem Puncte A, als aus einem Mittelpuncte, mit dem Halbmesser AE den Kreisbogen EF beschreibt; der Punct F wird der Berührungspunct der Geraden AB und des gesuchten Kreises seyn; man kann also diesen Kreis nach dem im §. 124. gezeigten Verfahren beschreiben.

Diese Auflösung ist leicht zu beweisen, wenn man in Erwägung zieht, daß die Linie AC eine Secante ist, und daß die Aufgabe darauf zurück kommt, auf AB den Berührungspunct zu finden, für welchen man nach §. 128. haben muß

$$AD : AF = AF : AC,$$

woraus folgt, daß der Abstand AF erhalten wird, wenn mann die mittlere Proportionale zwischen AD und AC nimmt *).

§. 134.

---

*) Die Aufgabe dieses, so wie die des vorhergehenden §., ist zweyer Auflösungen fähig. In der ersten erfüllt nicht allein die Linie BD Fig. 69., sondern auch die Linie BF die Bedingun-

§. 134. Lehrsatz.

In einem Halbkreise verhalten sich die zweyten Potenzen der Längen der Sehnen AC, AF, welche vom Durchmesser aus gezogen sind Fig. 68. wie die Abschnitte AE und AG, welche auf dem Durchmesser zwischen dem, beyden gemeinschaftlichen äußern Punct und den Endpuncten der von ihren andern äußern Puncten herabgelassenen senkrechten liegen.

Beweis.

Da die Sehnen AO und AF respectiv mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser AB und jedem der Segmente AE und AG sind (§. 131.), so wird man haben

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE}, \quad \overline{AF}^2 = \overline{AB} \times \overline{AG},$$

woraus folgt

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE} : \overline{AB} \times \overline{AG},$$

---

gungen des Vortrags, da im letztern Falle AB die mittlere Proportionale zwischen BF und BD seyn wird (Siehe die höhere Geomertie).

In der obigen Aufgabe kann man die Linie AE Fig. 70. nicht allein von A in F, sondern auch auf die entgegengesetzte Seite in F′ tragen; man wird also einen zweyten Kreis haben, welcher die Gerade AB im Puncte F′ berühren, und durch die Puncte D und C gehen wird.

Wenn die Linie DC der AB parallel wird, so giebt die angezeigte Construction nicht den Punct F; es ist aber offenbar, daß in diesem Falle die von der Mitte der Sehne DC senkrecht errichtete und durch den Mittelpunct des gesuchten Kreises gehende Linie, welche dann auf der Tangente AB senkrecht wird, den Berührungspunct F bestimmen wird (§. 103.).

welches sich, wenn man den beyden Gliedern der Proportion gemeinschaftlichen Factor AB ausläßt, auf

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 = AE : AG$$

reducirt.

Von den um den Kreis beschriebenen und in demselben eingeschriebenen Vielecken.

§. 135.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, daß man durch jede drey Puncte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis führen kann; hieraus folgt, daß man auch durch die Scheitel der Winkel irgend eines Dreyecks ABC Fig. 71. einen Kreis führen kann; in diesem Falle ist das Dreyeck ABC im Kreise eingeschrieben, und der Kreis ist um das Dreyeck beschrieben.

Diese Eigenschaft des Dreyecks bestätigt die in §. 36, 37 und 51. bewiesenen. 1) Sieht man, daß die Summe der drey Winkel eines Dreyecks zweyen rechten gleich ist; denn jeder derselben hat die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogens zu seinem Maaße, und die Summe dieser drey Hälften, welche den halben Umkreis ausmacht, ist das Maaß von zweyen Rechten (§. 110.).

2) Die Gleichheit der Winkel A und B führt die der gegenüberstehenden Bogen CB und AC mit sich, welche respectiv die doppelten von den diese Winkel messenden Bogen sind (§. 112.); die Sehnen der Bogen CB und AC, welche nichts anders als die diesen Win-

keln gegenüber liegenden Seiten sind, werden also ebenfalls gleich seyn (§. 99.). Das Umgekehrte von diesem Satze läßt sich auch leicht beweisen.

3) Da endlich der größere Bogen immer auf einer größern Sehne steht, so folgt offenbar, daß dem größern Winkel in einem Dreyecke die größere Seite gegenüber liegen muß.

§. 136. Aufgabe.

In ein gegebenes Dreyeck ABC Fig. 72. einen Kreis einzuschreiben, das heißt, innerhalb dieses Dreyecks einen Kreis zu beschreiben, der nur die drey Seiten desselben berühre.

Auflösung.

Man theile irgend zwey Winkel dieses Dreyecks, z. B. A und B, in zwey gleiche Theile (§. 111.); der Durchschnittspunct O der Theilungslinien AO und BO wird der Mittelpunct des gesuchten Kreises seyn.

Denn wenn man vom Puncte O auf jede der Seiten AB, AC, BC eine senkrechte fällt, so werden die Dreyecke AEO, ADO (§. 34.), so wie die Dreyecke DOB und BOF einander gleich seyn; denn die ersten sind in D und E rechtwinklicht, und haben die Winkel EAO, DAO, als Hälften des Winkels DAE, gleich, und die Seite AO gemein; die andern in D und F rechtwinklichte haben die Winkel DBO, FBO als Hälften des Winkels DBC gleich, und die Seite BO gemein. Die beyden senkrechten EO und FO sind also der DO gleich, und folglich kann der aus dem Puncte O, als aus einem Mittelpuncte, mit einem der DO gleichen Halb-

messer beschriebene Kreis die Seiten des Dreyecks ABC nur berühren.

Da wir nur von den Winkeln A und B Gebrauch gemacht haben, so bleibt uns noch zu beweisen, daß man, wenn mit einem von diesen der Winkel C combinirt wird, immer denselben Punct O finden wird. In dieser Absicht verbinde man den Punct O mit dem dritten Puncte C durch die Linie OC; die Gleichheit der in E und F respectiv rechtwinklichten Dreyecke CEO, CFO, welche die Seiten EO und FO gleich und die Seite CO gemein haben (§. 34.), beweist, daß die Geraden CO auch den Winkel C in zwey gleiche Theile theilt.

§. 137. Anmerkung.

Da man durch drey gegebene Puncte nur einen einzigen Umkreis eines Zirkels legen kann; so könnte offenbar, wenn man beliebig einen vierten Punct D Fig. 71. annähme, dieser Punct außerhalb des Kreises ABC fallen, und es wäre dann unmöglich in einem Kreis das Viereck ACBD einzuschreiben; um so mehr muß es bey Vielecken, deren Anzahl 4 übertrift, Ausnahmen geben*).

§. 138. Lehrsatz.

Jedes Vieleck von jeder beliebigen Anzahl Seiten

---

*) Es ist aus dem bloßen Anblick der Figur klar, daß alle Vierecke, wie ACBE, in denen die Summe zweyer gegenüber stehenden Winkel E und A zwey rechte beträgt (§. 112.), in einem Kreise eingeschrieben werden können; indessen ist bey ACDB diese Summe bey den Winkeln C und B größer, und bey A und D kleiner als zwey rechte.

kann, wenn es regulär ist, das heißt, wenn alle seine Seiten und Winkel gleich sind, in und um einen Kreis beschrieben werden.

Beweis.

Es sey Fig. 73. ABCDEF das Polygon, welches alle seine Winkel ABC, BCD, CDE ꝛc. gleich hat, und in welchem auch die Seiten AB, BC, CD ꝛc. gleich sind. 1) Der durch die Scheitel A, B, C irgend dreyer seiner Winkel gehende Kreis muß auch durch die aller übrigen Winkel gehen; denn wenn man vom Mittelpuncte O des Kreises ABC die Geraden AO, BO, CO, DO ꝛc. zieht, so werden sie nach der Construction Halbmesser dieses Kreises, und folglich einander gleich seyn; die gleichschenklichten Dreyecke AOB und BOC werden ebenfalls gleich seyn, weil alle ihre Seiten stückweise gleich sind, indem nach der Annahme BC = AB; da die Winkel ABO und CBO einander gleich sind, so wird jeder derselben die Hälfte des Polygonwinkels ABC seyn; der ihnen gleiche Winkel BCO wird also ebenfalls die Hälfte des Winkels BCD seyn, der der Annahme nach dem ABC gleich ist; OCD wird die andre Hälfte und folglich dem BCO gleich seyn. Dieses vorausgesetzt werden, da nach der Annahme CD der CB gleich ist, die Dreyecke BCO und OCD, in deren jedem ein von zweyen gleichen Seiten eingeschlossener Winkel gleich ist, einander gleich seyn (§. 16.), und OD = OC geben; der Punct D wird also auf dem Umkreise des Zirkels ABC liegen. Man kann auf eben die Art beweisen, daß der Punct F und alle folgende Puncte sich darauf befinden müssen.

2) Wenn man vom Mittelpuncte O des umschriebenen Kreises und des eingeschriebenen Polygons ABCDEF eine senkrechte OG auf eine Seite AB des Polygons fällt, so wird der aus dem Puncte O als aus einem Mittelpuncte mit dem Halbmesser GO beschriebene, und vermöge der Construction, die Seite AB im Puncte G berührende Kreis, auch jede der andern in ihrer Mitte berühren; denn wenn man vom Puncte O auf die auf AB folgende Seite BC, die senkrechte OH fällt, so werden die in G und H respectiv rechtwinklichten Dreyecke, in denen ferner der Winkel GBO den OBH gleich, und denen die Seite OB' gemein ist, einander gleich seyn (§. 34.), und folglich OG = GH geben; der Kreis GH wird also BC in H berühren, welcher Punct die Mitte von BC ist, weil die schiefen Linien OB und OC gleich sind. Dieselben Schlüsse zeigen, daß der Kreis auch jede andre Seite berühren muß.

§. 139.

Die Winkel AOB, BOC, COD ꝛc., welche von den aus dem Mittelpuncte O des Polygons nach jedem seiner Winkel gezogen werden, heißen **Mittelpunctswinkel**, um sie von den Winkeln im Umkreise ABC, BCD, CDE ꝛc. zu unterscheiden. Alle Mittelpunctswinkel eines und desselben regulären Polygons sind einander gleich, und da ihre Summe vier rechte beträgt (§. 13.), so ist jeder derselben gleich dieser Summe dividirt durch die Anzahl der Winkel oder durch die der Seiten des vorgelegten Polygons.

§. 140. **Lehrsatz.**

Alle regulären Vielecke von einer gleichen Anzahl

Seiten sind einander ähnlich, und die Umkreise der Vielecke verhalten sich wie die Halbmesser der Kreise, in denen sie eingeschrieben, oder um welche sie beschrieben sind.

Beweis.

1) Die Winkel dieser Vielecke sind alle einander gleich; und da die Seiten des einen unter sich gleich, und die des andern ebenfalls unter sich gleich sind, so werden die ersten mit den letztern in einerley Verhältniß stehen, und folglich einander proportinal seyn; sie sind also ähnlich.

2) Die Winkel AOB und aob sind gleich, und die Dreyecke AOB und aob, welche überdies gleichschenklicht sind, werden ähnlich seyn; sie geben also

$$AB : ab = AO : ao;$$

und da die Umfange der Polygone ABCDEF, abcdef sich gegen einander wie ihre homologe Seiten AB, ab verhalten (§. 93.), so verhalten sie sich auch vermöge dieser Proportion wie die Halbmesser AO und ao der Kreise, in welchen diese Polygone eingeschrieben, oder um welche sie beschrieben sind.

Die Aehnlichkeit der in G und g rechtwinklichten Dreyecke AGO und ago ist offenbar wegen der Gleichheit der Winkel BAO und bao und giebt

$$AO : ao = OG : og,$$

woraus folgt

$$AB : ab = OG : og;$$

es ergiebt sich also hieraus, daß Umkreise der vorgelegten Vielecke, die ihren homologen Seiten AB und ab proportional sind, sich wie die Halbmesser OG und og

der Kreise verhalten werden, um welche sie beschrieben sind.

§. 141. Aufgabe.

Wenn ein Polygon von irgend einer Anzahl Seiten in einem Kreise eingeschrieben ist, in denselben Kreis ein andres Polygon von doppelt so viel Seiten einzuschreiben, und den Werth des einen aus den Seiten des andern zu finden.

Auflösung.

Es sey AB Fig. 77. eine Seite des ersten Polygons und AOB der Mittelpunctswinkel dieses Polygons; man theile diesen Winkel oder den ihn messenden Bogen AB'B, im Puncte B', in zwey gleiche Theile (§. 111.), und die einander gleichen AB' und B'B werden offenbar zwey an einander liegenden Seiten des neuen Polygons seyn.

Um den Werth von AB' zu finden, muß man den Halbmesser B'O bis in D verlängern; man wird dann haben

$$\overline{AB'}^2 = \overline{B'D} \times \overline{B'E} = \overline{2B'O} \times \overline{B'E},$$

weil die Sehne AB' die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser B'D und dem Segment B'E ist (§. 131.); da aber $B'E = B'O - EO$, da ferner in dem in E rechtwinklichten Dreyecke AEO, die Seite $EO = \sqrt{(\overline{A'O}^2 - \overline{AE}^2)} = \sqrt{(\overline{B'O}^2 - \overline{AE}^2)}$, und weil $AE = \frac{1}{2}AB$, so kann man daraus herleiten

$$B'E = B'O - \sqrt{\langle \overline{B'O}^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2 \rangle},$$

$$AB'^2 = 2B'O \langle B'O - \sqrt{[\overline{B'O}^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2]} \rangle.$$

Nimmt man zum gemeinschaftlichen Maaße oder zur

Einheit den Halbmesser B′O des Kreises, in welchem die vorgelegten Vielecke eingeschrieben sind, so wird man haben $B'O = 1$; und es wird kommen

$$\overline{AB}^2 = 2\{1 - \sqrt{[1 - (\tfrac{1}{2}AB)^2]}\}.$$

Theilte man den Bogen AB′ im Puncte B″ in zwey gleiche Theile, so würde man ebenfalls

$$\overline{AB''}^2 = 2\{1 - \sqrt{[1 - (\tfrac{1}{2}AB')^2]}\}$$

für die Seite des Vielecks haben, welches doppelt so viele Seiten als das vorhergehende hat, und so fort.

§. 142.

Nächst dem gleichseitigen Dreyecke ist das einfachste der regulären Polygone das Viereck, in welchem alle Seiten und Winkel gleich sind. Dieses Polygon wird ein Quadrat genannt.

Da die Summe aller vier innern Winkel dieses Polygons vier rechte beträgt (§. 80.), und auch alle einander gleich sind, so wird jeder derselben ein rechter seyn; es werden also im Quadrat ABCD Fig. 74. die vier Seiten AB, BC, CD, AD gleich, und die vier Winkel A, B, C, D rechte seyn.

§. 143. Anmerkung.

Das Quadrat ist offenbar ein Parallelogramm (§. 83.), welches alle seine vier Winkel, und alle seine vier Seiten gleich hat; man muß es nicht mit demjenigen Parallelogramm verwechseln, in welchem zwar alle Seiten gleich, die Winkel aber ungleich sind; dies letztere, von welchem Fig. 75. einen Fall darbiethet, heißt ein Rhombus.

Wenn die an einander stoßenden Seiten ungleich sind, die Winkel aber rechte bleiben, so wird das Parallelogramm, welches rechtwinklicht ist, schlecht weg ein Rechteck, Rectangel genannt. ABCD Fig. 76. ist ein Rechteck.

Es ist offenbar, daß jedes Rechteck in einen Kreis eingeschrieben werden kann, denn die diagonalen AC und BD, welche in diesem Falle gleich sind, werden einander in dem von den Puncten A, B, C, D gleich weit abstehenden Punct O schneiden, weil überhaupt AO = AC, DO = OB (§. 86.); und folglich werden sich diese Puncte in dem Umkreise eines aus O als Mittelpunct, mit einem der AO gleichen Halbmesser beschriebenen Zirkels befinden.

§. 144. Aufgabe.

Auf eine gegebene Linie AB Fig. 74. ein Quadrat zu setzen.

Auflösung.

Man errichte aus den äußersten Puncten A und B dieser Geraden zwey senkrechte AD und BC, welche man der AB gleich macht; verbindet man dann die äußern Puncte C und D durch eine Gerade, so wird man das verlangte Quadrat ABCD haben.

Denn da die parallelen Seiten DC und AB zwischen den Parallelen AD und BC liegen, so sind sie gleich (§. 54.); da ferner die innern von einerley Seite liegenden Winkel ADC und BAD zusammen zwey rechte betragen (§. 47.), und der zweyte nach der Construktion ein rechter ist, so wird es auch der erste seyn. Dasselbe

läßt sich von BCD beweisen, wenn man ihn mit ABC vergleicht.

§. 145. Aufgabe.

In einen Kreis die Polygone von 4, 8, 16, 32, 64 ꝛc. Seiten einzuschreiben.

Auflösung.

Die Aufgabe reducirt sich darauf zuvörderst das von vier Seiten einzuschreiben, weil die übrigen vermittelst desselben construirt werden können (§. 141.).

Um in einen Kreis ABCD Fig. 78. ein Quadrat einzuschreiben, muß man auf irgend einen Durchmesser AC einen andern BD senkrecht errichten, wodurch auf dem Umkreise vier Puncte A, B, C, D gebildet, welche, durch gerade Linien verbunden, das verlangte Quadrat geben.

Denn die Winkel ABC, BCD ꝛc. sind alle rechte (§. 114.), und die Seiten AB, BC, CD, AD sind gleich, weil sie Hypothenusen der rechtwinklichten Dreyecke AOB, BOC, DOC, AOD sind, die offenbar einander gleich sind (§. 16.).

Da das rechtwinklichte Dreyeck AOB

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 2\overline{AO}^2$$

giebt, indem $AO = BO$, so kann man daraus schließen

$$AB = AO\sqrt{2};$$

und nimmt man den Halbmesser AO für die Einheit, so erhält man kloß

$$AB = \sqrt{2}\ *).$$

*) Da das Verfahren, um AB zu erhalten, sehr strenge ist, so folgt, daß die Geometrie den Werth der incommensu-

Wenn man diesen Werth in den von AB′ §. 141., dann diesen letztern in den von AB″ und so fort substituirt, so wird man successiv die Längen der Seiten der Vielecke von 8, 16 ꝛc. Seiten im Verhältniß gegen den Halbmesser des Kreises haben.

§. 146. Aufgabe.

In einen Kreis die Vielecke von 3, 6, 12, 24, 48 ꝛc. Seiten einzuschreiben.

Auflösung.

Die Seite des Sechsecks biethet sich zuerst dar; sie ist dem Halbmesser dieses Kreises gleich. Denn da der Mittelpunctswinkel AOB Fig. 79. in diesem Polygon dem sechsten Theil von vier rechten beträgt, so wird er $\frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$ von einem rechten seyn; zieht man diese Größe von zweyen rechten ab, so bleibt für beide übrige Winkel BAO, ABO $2 - \frac{2}{3}$ oder $\frac{4}{3}$ eines rechten, und da diese einander gleich sind, so wird jeder derselben $\frac{2}{3}$ eines rechten betragen. Da nun alsdann im Dreyecke ABO die drey Winkel gleich sind, so müssen es auch die Seiten seyn (§. 37.), und man wird mithin AB = AO haben.

---

rablen Größe $\sqrt{2}$, ganz genau giebt, den man mit Hülfe der Zahlen nur durch Näherung erhalten kann. Man muß indessen in Erwägung ziehen, daß diese Genauigkeit nur in Gedanken existirt; denn wollte man AB mit AO vergleichen, um deren Verhältniß nach dem Verfahren des §. 5. zu vergleichen, so würde man nur ein annäherndes Resultat erhalten, welches bey weitem nicht so genau als das aus den Zahlen hergeleitete seyn wird.

Es wird also in einen Kreis ein Sechseck eingeschrieben, wenn man den Halbmesser des Zirkels sechs Mahl auf seinen Umkreis trägt, und die auf einander folgenden Theilungspuncte durch gerade Linien verbindet. Nimmt man $AO = 1$, so wird man auch $AB = 1$ haben, und man kann vermittelst dieses Werths und der Formel des §. 141. zu den Werthen der Seiten der eingeschriebenen Polygone von 12, 24, 48 ꝛc. Seiten gelangen.

Um zum Werthe der Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreyecks ACE zu gelangen, darf man nur erwähnen, daß dieses Dreyeck gebildet wird, wenn man je zwey und zwey Winkel des Sechsecks durch gerade Linien verbindet, und daß das in C rechtwinklichte Dreyeck ACD geben wird

$$AC = V(\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = V[(2\overline{AO})^2 - \overline{AO}^2] = AO\,V3;$$

und setzt man $AO = 1$, so wird kommen $AC = V3$.

§. 147. Aufgabe.

In einen Kreis die Vielecke von 5, 10, 20, 40 ꝛc. Seiten einzuschreiben.

Auflösung.

Man findet zuvörderst die Seite des Zehnecks, wenn man das größere Segment von dem nach dem äußern und mittlern Verhältniß getheilten Halbmesser nimmt (§. 132.).

Denn in diesem Polygon ist der Winkel am Mittelpuncte AOB Fig. 80. der zehnte Theil von vier rechten, oder $\frac{2}{5}$ eines rechten; es bleibt also für die Winkel ABO und BAO $2 - \frac{2}{5}$ oder $\frac{8}{5}$ des rechten Winkels, welches

für jeden derselben $\frac{4}{5}$ giebt; der Winkel BAO ist also das Doppelte des Winkels AOB. Zieht man AG, welche mit AB den dem Winkel AOB gleichen Winkel BAG macht, so werden die beyden Dreyecke ABG und ABO, welche noch den Winkel B gemein haben, einander ähnlich seyn (§. 65.) und geben

$$BG : AB = AG : AO.$$

Nun ist das Dreyeck ABO gleichschenklicht, folglich wird es auch das Dreyeck ABG seyn; man wird also haben

$$AG = AB.$$

Da ferner der Winkel BAG dem AOB, oder $\frac{2}{5}$ eines rechten gleich ist, so wird er die Hälfte von BAO seyn, welcher deren $\frac{4}{5}$ enthält; die andre Hälfte GAO wird folglich dem AOB gleich seyn, welches geben wird (§. 37.)

$$GO = AG = AB;$$

und die vorhergehende Proportion, welche dann in

$$BG : GO = GO : BO$$

übergeht, daß der Halbmesser BO wirklich in G nach dem mittlern und äußern Verhältniß getheilt, und daß AB dem größern von beyden Abschnitten gleich ist.

Wenn man je zwey und zwey der Winkel des Zehnecks durch gerade Linien verbindet, so erhält man das Fünfeck. Wir wollen uns nicht dabei aufhalten die Seite des Zehnecks zu berechnen, weil diese Untersuchung für jetzt von keinem sonderlichen Nutzen ist.

§. 148. Anmerkung.

Man kann leicht begreifen, daß die Einschreibung der Vielecke in einen Kreis, auf die Eintheilung des

Umkreises in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zurückkommt. Die Verfahrungsarten, welche wir gegeben haben, um in einen Kreis die Vielecke von 4, 8, 16, 32 ꝛc., die von 3, 6, 12, 24 ꝛc., die von 5, 10, 20, 40 ꝛc. Seiten einzuschreiben, können dazu dienen, den Umkreis eines Zirkels nach den Zahlen dieser verschiedenen Reihen einzutheilen.

Es ist beyläufig zu merken, daß man ihn auch nach den Zahlen der Progression 15, 30, 60 ꝛc. theilen kann; denn da das Polygon von sechs Seiten den sechsten Theil des Umkreises, und das von zehn Seiten den zehnten Theil desselben giebt, so wird die Differenz der auf diesen Seiten der Polygone stehenden Bogen $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{15}$ des Umkreises seyn. Trägt man also von A in H den Halbmesser des Kreises, so wird der Bogen BH dieser 15te Theil, und seine Sehne wird die Sehne des Funfzehnecks seyn. Vermittels einer fortgesetzten Theilung dieses Bogens in zwey gleiche Theile erhält man die Vielecke von 30, 60, 120 ꝛc. Seiten *).

§. 149. Aufgabe.

Wenn ein reguläres Polygon von irgend einer An-

---

*) Diese Eintheilungen des Kreises sind nicht die einzigen, welche man geometrisch verrichten kann; Herr C. F. Gauß beweist in seinem im Jahre 1801 unter dem Titel Disquisitiones arithmeticae bekannt gemachten Werke, daß man auch die Eintheilung in $2^n + 1$ Theile verrichten kann, wenn diese Zahl eine Primzahl ist; hieraus erfolgt zuvörderst die Eintheilung in 17 Theile, von welcher es auch einen besondern Beweis giebt, der aber nicht von der Art ist, daß er hier beygebracht werden könnte.

zahl Seiten in einem Kreise eingeschrieben ist, um diesen Kreis ein Polygon von einer gleichen Anzahl Seiten um diesen Kreis zu beschreiben; und umgekehrt, wenn das umschriebene Polygon gegeben ist, das eingeschriebene zu finden.

Auflösung.

Es sey abcde Fig. 81. das vorgelegte Polygon; man ziehe nach den äußersten Puncten desselben die Halbmesser Oa, Ob, Oc ꝛc., auf welche man dann die senkrechten EA, BA, CA ꝛc. errichtet; die von diesen den Umkreis abcde berührenden senkrechten gebildete Figur wird das verlangte Polygon seyn.

Denn die Dreyecke aAb, bBc, cCd ꝛc. sind einander gleich und gleichschenklicht, weil die Seiten ab, bc, cd ꝛc. gleich, und die auf diesen Seiten gebildeten Winkel Aab, Aba, Bbc, Bcb, welche die gleichen Bogen ab, bc, cd ꝛc. fassen, ebenfalls einander gleich sind (§. 114.); man wird also haben:

1) $aAb = bBc = cCd$ ꝛc.

2) $aA = Ab = bB = Bc = cC = Dd$,

woraus man herleiten kann

$AA = 2Ab$, $BC = 2Bc$, $CD = 2Cd$ ꝛc.

und folglich

$AB = BC = CD$ ꝛc.

Da nun im Polygon ABCDE alle seine Winkel und Seiten gleich sind, so wird es das gesuchte seyn.

Man kann das eingeschriebene Polygon aus dem umschriebenen herleiten, wenn man die Puncte a, b, c, d ꝛc., welche die Mitten der Seiten dieses letztern

sind,

sind, und in welchen es den Kreis berührt, durch gerade Linien verbindet.

Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man bloß in Erwägung zu ziehen, daß die Dreyecke aAb, bBc, cCd ꝛc. jetzt einander gleich sind, indem in jedem derselben ein zwischen zweyen gleichen Seiten liegender Winkel gleich ist, weil die Winkel A, B, C ꝛc. die des regulären Polygons, und weil die Seiten aA, Ab, bA die Hälften der einander gleichen Seiten AB, BC ꝛc. sind. Hieraus folgt, daß die Seiten ab, bc, cd einander gleich, und daß die darauf stehenden Bogen es ebenfalls seyn werden; es sind also die Winkel abc, bcd ꝛc., deren Scheitel auf dem Umkreise liegen, und welche zwischen ihren Seiten eine gleiche Anzahl dieser Bogen fassen, einander gleich (§. 114.). Das Polygon abcde, in welchem alle Winkel und Seiten gleich sind, wird also das gesuchte seyn.

Man könnte auch das von abcde nur der Lage nach verschiedene eingeschriebne Polygon a′b′c′d′e′ bilden, wenn man von den Winkeln des umschriebenen Polygons nach dem Mittelpunct des eingeschriebenen Kreises die Geraden AO, BO, CO ꝛc. führte, und die Puncte a′, b′, c′, d′, e′, in welchen die Linien den Umkreis des nehmlichen Zirkels durchschneiden, durch gerade Linien verbinden möchte. Denn da $AO = BO$, $a'O = b'O$, so wird man haben

$$AO : a'O = BO : b'O,$$

und die gerade Linie a′b′ wird folglich der AB parallel seyn (§. 60.); die Dreyecke AOB, a′Ob′ werden einander ähnlich seyn; dasselbe ist bey den Dreyecken BOC

und b′Oc′ und so fort der Fall; die Seiten a′b′, b′c′, c′d′ ꝛc., welchen den Seiten AB, BC, CD ꝛc. homolog sind, werden nothwendigerweise einander gleich seyn, und man kann wie oben beweisen, daß sie auch gleiche Winkel einschließen.

§. 150. Zusatz.

Man kann nach dem Vorhergehenden den Werth der Seite AB des umschriebenen Polygons finden, wenn man die Dreyecke OGa und OAa betrachtet, welche einander ähnlich sind, weil jedes derselben in a und G einen rechten Winkel hat, und der Winkel O beyden gemein ist, und in welchen aG und Aa die Hälften der Seiten ab und Ab der Seiten des eingeschriebenen und umschriebenen Polygons sind. Man zieht hieraus

$$OG : Oa = ab : Aa$$

oder

$$OG : Oa = \tfrac{1}{2}ab : \tfrac{1}{2}Aa,$$

woraus folgt

$$AB = \frac{\overline{ab} \times \overline{Oa}}{\sqrt{[\overline{Oa}^2 - (\tfrac{1}{2}ab)^2]}},$$

wenn man in Erwägung zieht, daß das rechtwinklichte Dreyeck OGa giebt

$$OG = \sqrt{(\overline{Oa}^2 - \overline{aG}^2)} = \sqrt{[\overline{Oa}^2 - (\tfrac{1}{2}ab)^2]}.$$

§. 151. Bemerkungen.

Es ist nöthig zu merken, daß der Umfang eines eingeschriebenen Vielecks desto größer wird, je mehr man die Anzahl seiner Seiten vergrößert; indessen der des umschriebenen Polygons unter diesen Umständen ab-

nimmt. Denn wenn man den Bogen aa′b Fig. 81 * halbirt und die Sehnen aa′ und a′b zieht, so wird man zwey auf einander folgende Seiten des eingeschriebenen Polygons von einer doppelt so großen Anzahl Seiten haben, als das zu welchem ab gehört. Zieht man A′B auf a′O senkrecht, so werden die Geraden aA′, A′a′, a′A′, B′b die halben Seiten des eingeschriebenen Polygons seyn, welches mit demjenigen correspondirt, von welchem aa′ einen Theil ausmacht (§. 149.). Es ist nun offenbar, daß die Theile aAB, aA′B′b, ab, aa′b′ in den Polygonen, von denen sie einen Theil ausmachen, so oft enthalten seyn werden als der Bogen aa′b im ganzen Umkreise enthalten ist, und daß sie folglich ähnliche Theile von jedem Polygon seyn werden; und da

$$aa' + a'b > ab,$$

so wird der Umfang des neuen eingeschriebenen Polygons den des zweyten übertreffen. Es ist nicht minder klar, daß

$$B'A' < AA' + AB' \text{ (§. 15.)},$$

woraus folgt

$$aA'B'b < Aa + bA,$$

und daß folglich der Umkreis des zweyten umschriebenen Polygons kleiner als der des ersten ist.

Dieses vorausgesetzt, so muß, da das eingeschriebene Polygon, welches immer kleiner als das correspondirende umschriebene ist, an Umfang zunimmt, wenn seine Seiten vermehrt werden, indeß das letztere abnimmt, die Differenz zwischen beyden Polygonen unter diesem Umstande immer abnehmen. Man kann selbst,

wenn auch eine noch so kleine Größe δ gegebene ist, zwey Polygone, ein eingeschriebenes und ein umschriebenes, von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz ihrer Umkreise kleiner als diese Größe sey. Um dieses einzusehen erinnere man sich nur, daß sich die Umkreise zweyer regulären Polygone von einerley Anzahl Seiten, wie die Halbmesser der Kreise verhalten, um welche sie beschrieben sind (§. 140.); denn wenn man durch P den Umfang des Polygons ABCDE Fig. 81., und durch p den des Polygons abcde bezeichnet, so wird man haben

$$P : p = Oa : OG,$$

woraus man herleiten kann

$$P - p : P = Oa - OG : Oa \text{ und } P - p = \frac{a'G \times P}{Oa}.$$

Aber es hindert uns nichts, die a'G kleiner als jede gegebene Größe zu nehmen; denn nachdem man auf den Halbmesser Oa' einen Theil a'G von der gegebenen Größe getragen, und die Sehne ab gezogen hat, so braucht man nur, wenn der Bogen aa'b kein aliquoter Theil des Umkreises ist, einen kleinern aliquoten Theil als diesem Bogen zu nehmen, und die der a'G analoge Linie wird noch kleiner seyn.

Man kann also, wenn die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen Polygons hinlänglich vergrößert wird, die Größe P — p so klein als man will machen.

§. 152. Zusatz.

Da nach dem Vorhergehenden die Umkreise der umschriebenen Vielecke immer mehr abnehmen, je mehr sie

sich dem Umkreise des Zirkels nähern, indeß die der eingeschriebenen Polygone unter demselben Umstande immer mehr abnehmen, so ist offenbar der Umkreis des Zirkels kleiner als der Umfang eines jeden umschriebenen, und größer als der eines jeden eingeschriebenen Polygons. Dieser Umkreis wird also von einem jeden dieser Umfange um weniger unterschieden seyn als ihre Differenz selbst beträgt; und man kann folglich ein Polygon, es sey ein eingeschriebenes oder ein umschriebenes, von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz zwischen seinem Umfang und dem Umkreise des Zirkels kleiner als jede gegebene Größe sey, so klein auch diese letztere seyn mag.

Auf dieser Eigenschaft beruht das von Archimed gebrauchte Verfahren, um auf eine annähernde Weise das Verhältniß des Umkreises zu seinem Durchmesser zu bestimmen, und wir werden einen ähnlichen Gebrauch davon machen, nachdem wir bewiesen haben werden, daß dies Verhältniß bey allen Kreisen unverändert bleibt. In dieser Absicht wollen wir einen Lehrsatz vortragen, der sich an alle Sätze von der Gattung desjenigen anschließt, welchen wir zu beweisen haben.

§. 153. Lehrsatz.

Wenn sich von zweyen unveränderlichen Größen A und B beweisen läßt, daß ihre Differenz A—B immer kleiner als eine dritte Größe δ ist; so klein auch diese Größe seyn mag, so sind diese beyden Größen einander gleich.

Beweis.

Wenn sie einander ungleich wären, so müßte man nothwendigerweise haben A — B = D, wo D ihre Differenz anzeigt; es würde also unmöglich seyn δ kleiner als D, und folglich so klein als man will zu nehmen.

Anmerkung.

Man hat im obigen Satze auf das Wort **unveränderlich** wohl Rücksicht zu nehmen; denn man kann wohl z. B. für $\sqrt{2}$ einen Ausdruck finden, welcher von dem wahren um eine kleinere Größe als jede beliebige unterschieden seyn kann, ohne jedoch jemals zu genauen Werth von $\sqrt{2}$ zu gelangen; allein hierbey ändern sich die Resulta bey jeder neuen Annäherung, da indessen jede der Größen A und B nur einer einzigen Bestimmung fähig ist.

§. 154. Lehrsatz.

Die Umkreise der Zirkel verhalten sich wie ihre Halbmesser oder wie ihre Durchmesser.

Da sich die Umkreise zweyer Polygone, so groß auch die Anzahl ihrer Seiten seyn mag, wenn diese nur in beyden einerley ist, sich wie die Halbmesser der Kreise verhalten, in denen sie eingeschrieben sind, so erhält man, wenn p und p′ ihre Umfange, R und R′ die Halbmesser der umschriebenen Kreise bezeichnen, $\frac{p'}{p} = \frac{R'}{R}$. Man kann sich ferner die Anzahl der Seiten dieser Polygone so groß vorstellen, daß die Differenz zwischen einem je-

den ihrer Umfange und des Kreises, in welchen es eingeschrieben ist, kleiner als jede beliebige Größe sey. Wenn also $\frac{C'}{C}$ das Verhältniß der Zirkelumkreise ist, so wird die Differenz zwischen den Verhältnissen $\frac{C'}{C}$ und $\frac{p'}{p}$ auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit gebracht werden können. Da diese Differenz auch die der unveränderlichen Verhältnisse $\frac{C'}{C}$ und $\frac{R'}{R}$ ist, weil $\frac{p'}{p} = \frac{R'}{R}$, so wird sich beweisen lassen, daß die Differenz der unveränderlichen Größen $\frac{C'}{C}$ und $\frac{R'}{R}$ unter jeder gegebenen Größe ist; man wird also vermöge des vorhergehenden Satzes haben

$$\frac{C'}{C} = \frac{R'}{R} \text{ oder } C : C' = R : R',$$

welches auch giebt

$$C : C' = 2R : 2R' = D : D',$$

wenn man mit D und D' die Durchmesser der vorgelegten Kreise bezeichnet *).

---

*) Dieser Satz läßt sich verschiedenermaßen durch ähnliche Schlüsse wie im §. 58. unmittelbar beweisen, wenn man in Erwägung zieht, daß man, so klein auch die Differenz zwischen beyden Kreisen seyn mag, sich immer ein reguläres Polygon denken kann, welches größer als der eine und kleiner als der andre sey. Dieser Satz, welcher offenbar aus dem des §. 152. folgt, ist zuerst vom Euclid (XII. Buch, 16. Satz) unter einer sehr eleganten Form aufgestellt worden. Dieser Verf. nimmt an, man habe beyde Kreise aus einem gemeinschaftlichen Mit-

§. 155. Zusatz.

Der vorhergehende Satz zeigt, daß das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser in allen Kreisen dasselbe

---

telpuncte O′ beschrieben Fig. 81 **. Es ist dann klar, daß, wenn man dem innern Kreise die Tangente MN führt, und auf dem äußern Kreise einen aliquoten Theil kleiner, als den Bogen MQN nimmt, das auf diesem Theile construirte Polygon D′E′F′G′H′, den Umkreis des kleinern Zirkels nicht erreichen wird.

Maurolycus, der Verfasser des im Jahre 1685 zu Panorme in Sicilien erschienenen sehr schätzbaren Commentars, bediente sich dieser Bemerkung, um den obigen Satz zu beweisen (Seite 5 und folg.).

Wenn man nicht $C : C' = DO : d'O'$, sondern $C : C' = DO : D'O'$ hätte, wo $D'O' > d'O'$ wäre, so könnte man mit $D'O'$ einen dem Kreise C' concentrischen Kreis beschreiben, und in den ersten ein Polygon $D'E'F'G'H'$ einschreiben, welches den zweyten nicht erreichte. Vergleicht man dieses Polygon mit dem ihm im Kreise C correspondirenden DEFGH, und bezeichnet man die respectiven Umkreise dieser Polygone durch p' und p, so würde man haben

$$DO : D'O' = p : p',$$

woraus folgen würde

$$C : C' = p : p',$$

welches unmöglich ist, indem $C > p$ und $C' < p'$.

Man kann auch nicht das vierte Glied der Proportion, dessen drey erste Glieder C, C′, DO sind, kleiner als $d'O'$ annehmen; denn wäre dies, so hätte man, wenn es durch X bezeichnet wird

$$X : DO = d'O' : Z,$$

wo $Z > DO$ wäre; kehrt man die Proportion $C : C' = DO : X$ um, so würde daraus folgen

$$C' : C = X : DO = d'O' : Z;$$

ist, und daß man vermittelst dieses Verhältnisses die Länge eines Umkreises berechnen kann, wenn man seinen Halbmesser kennt. Denn wenn π dieses Verhältniß bezeichnet, oder, welches auf eins hinaus kommt, den Umkreis eines Zirkels, dessen Durchmesser zur Einheit genommen wird, so wird man haben

$$1 : \pi = 2R : C,$$

woraus man zieht

$$C = 2\pi R, \text{ und } R = \frac{C}{2\pi},$$

vermittelst welcher Formeln man den Umkreis C berechnen kann, wenn der Halbmesser R gegeben ist, und den Halbmesser, wenn man den Umkreis kennt.

§. 117. Aufgabe.

Das annähernde Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser zu finden.

Auflösung.

Es ist aus §. 152. klar, daß diese Aufgabe aufgelöst wird, wenn man in einer der Reihen der Vielecke, die man einschreiben kann, den Umfang einer gewissen

---

das heißt das vierte Glied der Proportion $C' : C = d'O' : Z$ wäre größer als der Halbmesser des zweyten Zirkels, welches im ersten Falle des Beweises als ungereimt erklärt worden.

Der Nutzen, den man von dieser Beweisart, die, wie wie man sieht, sehr alt ist, ziehen kann, besteht darin, daß sie das Polygon, welches man betrachten muß, gleichsam vor Augen legt.

Anzahl der ersten, und den Umfang der ihnen correspondirenden umschriebenen Vielecke berechnet. Man wird durch dieses Mittel zwey Reihen Zahlen erhalten, von denen die ersten alle kleiner, und die andern größer als der Umkreis des Zirkels sind; und man würde abbrechen, sobald die Differenz der in beyden Reihen correspondirenden Zahlen kleiner wird als der Grad der Genauigkeit erfordert, mit dem man den Werth des Umkreises zu erhalten sich vorsetzt. Wir wollen auf diese Untersuchung die in einem Zirkel dessen Halbmesser = 1 eingeschriebenen und umschriebenen Polygone von 6, 12, 24 ꝛc. Seiten anwenden.

Es sey zuvörderst a die Seite irgend eines eingeschriebenen Vielecks, A die des correspondirenden umschriebenen Polygons, a′ endlich die des eingeschriebenen Polygons, welches doppelt so viele Seiten als das erste hat; so wird man haben (§. 150.)

$$A = \frac{a}{\sqrt{(1-\frac{1}{4}a^2)}} = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{(4-a^2)}};$$

und (§. 141.),

$$a' = \sqrt{[2(1-\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2})]} = \sqrt{(2-\sqrt{4-a^2})}.$$

Fängt man mit dem eingeschriebenen Sechseck an, so wird man haben $a = 1$, und $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks wird folglich 6, der des umschriebenen Sechsecks $\frac{12}{\sqrt{3}}$ seyn; und der Umkreis wird zwischen diesen beyden Zahlen liegen. Man erhält

weit nähere Gränzen, wenn man zu den Polygonen von 12 ꝛc. Seiten übergeht.

Es seyen also a', a'', a''' ꝛc. die Seiten der eingeschriebenen Polygone von 12, 24, 48 ꝛc. Seiten, A', A'', A''' ꝛc. die Seiten der correspondirenden umschriebenen Polygone; und da der Halbmesser des Kreises 1 gesetzt wird, so wird sein Umkreis 2π seyn (§. 155.); und setzt man zur Abkürzung

$$r' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - a'^2}, \quad r'' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - a''^2},$$
$$r''' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - a'''^2} \text{ ꝛc.}$$

so wird man vermittelst der vorhergehenden Formeln haben

$$a' = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}, \quad A' = \frac{a'}{r'}, \quad 2\pi \begin{cases} > 12\,a' \\ < 12\,A' \end{cases}$$

$$a'' = \sqrt{(2 - 2r')}, \quad A'' = \frac{a''}{r''}, \quad 2\pi \begin{cases} > 24\,a'' \\ < 24\,A'' \end{cases}$$

$$a''' = \sqrt{(2 - 2r'')}, \quad A''' = \frac{a'''}{r'''}, \quad 2\pi \begin{cases} > 48\,a''' \\ > 48\,A'''. \end{cases}$$

Man wird successiv finden $\sqrt{3} = 1{,}732050807568877$ *)

a^{I}	$= 0{,}517638090205$	$12\,a^{I}$	$= 6{,}2116571$
r^{I}	$= 0{,}965925826289$	$12\,A^{I}$	$= 6{,}4307806$
a^{II}	$= 0{,}261052384440$	$24\,a^{II}$	$= 6{,}2652572$
r^{II}	$= 0{,}991444861374$	$24\,A^{II}$	$= 6{,}3193199$
a^{III}	$= 0{,}130806258460$	$48\,a^{III}$	$= 6{,}2787004$
r^{III}	$= 0{,}997858923234$	$48\,A^{III}$	$= 6{,}2921724$
a^{IV}	$= 0{,}065438165643$	$96\,a^{IV}$	$= 6{,}2820639$
r^{IV}	$= 0{,}999464537476$	$96\,A^{IV}$	$= 6{,}2854292$
a^{V}	$= 0{,}032723463253$	$192\,a^{V}$	$= 6{,}2829049$
r^{V}	$= 0{,}999866137909$	$192\,A^{V}$	$= 6{,}2837461$
a^{VI}	$= 0{,}016362279208$	$384\,a^{VI}$	$= 6{,}2831152$
r^{VI}	$= 0{,}999966545917$	$384\,A^{VI}$	$= 6{,}2833260$
a^{VII}	$= 0{,}008181208025$	$768\,a^{VII}$	$= 6{,}2831678$
r^{VII}	$= 0{,}999991633444$	$768\,A^{VII}$	$= 6{,}2832203$
a^{VIII}	$= 0{,}004090612582$	$1536\,a^{VIII}$	$= 6{,}2831809$
r^{VIII}	$= 0{,}999997908359$	$1536\,A^{VIII}$	$= 6{,}2831941$
a^{IX}	$= 0{,}002045307361$	$3072\,a^{IX}$	$= 6{,}2831842$
r^{IX}	$= 0{,}999999477089$	$3072\,A^{IX}$	$= 6{,}2831875$
a^{X}	$= 0{,}001022653814$	$6144\,a^{X}$	$= 6{,}2831850$
r^{X}	$= 0{,}999999869272$	$6144\,A^{X}$	$= 6{,}2831858$
a^{XI}	$= 0{,}000511326924$	$12288\,a^{XI}$	$= 6{,}2831852$
r^{XI}	$= 0{,}999999967318$	$12288\,A^{XI}$	$= 6{,}2831854$

Aus dieser Tafel sieht man, wie die Umkreise der eingeschriebenen und der umschriebenen Polygone sich immer mehr nähern; die der Polygone von 12288 Seiten sind nur um zwey Einheiten der siebenten Decimal-

---

*) Man siehe die Memoiren der Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1747, Seite 445.

ordnung unterschieden. Die sieben ersten Ziffern, welche beyden gemein sind, werden nothwendigerweise zum Umkreise des Zirkels gehören, dessen Länge folglich 6,283183 ist, welches wenigstens bis auf ein Millionentheilchen richtig ist.

Nimmt man für den Umkreis des Zirkels das Mittel zwischen dem Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen Polygons von 12288 Seiten, so wird man haben 6,2831853, in welchem Werthe auch die letzte Ziffer noch richtig ist; das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise wird also seyn 2 : 6,2831853 oder, wenn man beyde Glieder durch 2 dividirt 1 : 3,1415926. Es ist also 3,1415926 ein annähernder Werth des Verhältnisses, welches wir in §. 155. durch π bezeichnet haben.

Archimedes blieb bey einem eingeschriebenen und umschiebenen Polygon von 96 Seiten stehen, und fand, daß der Umkreis des Zirkels $< 3\frac{10}{70}$ und $> 3\frac{10}{71}$ wäre, welches das so sehr bekannte Verhältniß $1 : 3\frac{1}{7}$ oder 7:22 giebt. Nach ihm hat man die Genauigkeit viel weiter getrieben; allein unter den verschiedenen bekannten Verhältnissen verdient das von 113 : 355 seiner Einfachheit und Genauigkeit wegen besondre Aufmerksamkeit, weil es in Decimalbrüchen aufgelöst 3,1415929 giebt, welches Resultat bis auf der siebenten Decimalstelle richtig ist *).

---

*) Hierbey ist noch merkwürdig, daß dieses Verhältniß leicht im Gedächtnisse behalten werden kann, indem es den ersten drey ungeraden Zahlen 11, 33, 55 zusammengesetzt ist.

Anm. d. Uebers.

Adrien Metius, welcher in seiner Geometria practica das obige Verhältniß anführt, eignet es seinem Vater Peter Metius zu, der es in einer Wiederlegung der Quadratur des Zirkels von Simon Duchene bekannt gemacht haben soll *).

§. 157. Anmerkung.

Die Bildung der vorhergehenden Tafel ist nicht das beförderndste Mittel, zum Werthe der Seite des letztern eingeschriebenen Polygons, welches sie enthält, zu gelangen. Es führt eine halbe Anzahl Ausziehungen der Wurzeln zu diesem Resultate, wenn man statt der Seiten der dazwischen liegenden Polygone, die Sehne BC, B'C Fig. 77. derjenigen Bogen berechnet, welche zu den Bogen AB und AB' hinzugesetzt werden müssen, um die halben Umkreise zu ergänzen. In der That hat man

$$BC = \sqrt{(\overline{AC^2} - \overline{AB^2})},\quad BC = \sqrt{(\overline{AB^2} - \overline{AB'^2})},$$

weil die auf dem Durchmesser AB gebildeten Dreyecke ABC, AB'C, welche ihre Scheitel im Umkreise haben, nothwendigerweise rechtwinklicht sind (§. 114.). Nimmt

---

*) Die Untersuchungen der englischen Gelehrten in Indien haben uns mit einem Verhältniß bekannt gemacht, welches viel älter zu seyn scheint, und zugleich weit genauer als das von Archimedes ist. Es ist nehmlich das von 3927 zu 1250, welches in einem Werke der Braminen, betitelt Ayeen Akbery befindet, welches das graueste Alterthum übersteigt. Dieses Verhältniß auf Decimaltheile gebracht, giebt 3,1416; es ist also bis auf ein Zehntausendtheilchen richtig, und hängt von einem Polygon von 786 Seiten ab.

man nun den Halbmesser AO für die Einheit, und bezeichnet AB und AB′ durch a und d, BC und BC′ durch b und b′, so findet man, da AC = 2,

$$b = \sqrt{(4 - a^2)}, \quad b' = \sqrt{(4 - a'^2)};$$

und da man nach dem vorhergehenden §.

$$a' = \sqrt{(2 - \sqrt{4 - a^2})}$$

hat, so wird kommen

$$a' = \sqrt{(2 - b)} \text{ oder } a'^2 = 2 - b;$$

setzt man diesen Werth in den von b′, so wird erfolgen

$$b' = \sqrt{(2 + b)};$$

man geht also von b zu b′ über, wenn man die Quadratwurzel aus der ersten Größe um zwey vermehrt nimmt. Es ist offenbar, daß man auch haben wird $b'' = \sqrt{2 + b'}$, wo b″ die Sehne B″C des mit AB″, der Hälfte von AB′ correspondirenden Bogens vorstellt, und so fort.

Geht man von a = 1 aus, so wird man finden

$$b = \sqrt{3} = 1{,}7320508075$$

$$b^{I} = \sqrt{2 + 1{,}7320508075} = 1{,}8318516525$$

$$b^{II} = \sqrt{2 + 1{,}9318516525} = 1{,}9828897227$$

$$b^{III} = \sqrt{2 + 1{,}9828897229} = 1{,}9957178465$$

$$b^{IV} = \sqrt{2 + 1{,}9857178465} = 1{,}9989291749$$

$$b^{V} = \sqrt{2 + 1{,}9989291749} = 1{,}9997322758$$

$$b^{VI} = \sqrt{2 + 1{,}9997321758} = 1{,}9999330678$$

$$b^{VII} = \sqrt{2 + 1{,}9999330678} = \sqrt{3{,}9999330678},$$

und da b mit einem Polygon von sechs Seiten übereinstimmt, so wird b^{I} mit dem von 12, b^{II} mit dem von

24, b^{III} mit dem von 48, b^{IV} mit dem von 96, b^{V} mit dem von 192, b^{VI} mit dem von 384, und b^{VII} mit dem von 768 übereinstimmen. Bezeichnet man die Seite dieses letztern durch a^{VII}, so wird man haben

$$a^{VII} = \sqrt{(4 - b^{VII\,2})} = \sqrt{4 - 3'9999330678}$$
$$= \sqrt{0{,}00000669322} = 0{,}00818121;$$

multiplicirt man diese Zahl durch 768, so erhält man den Umfang des eingeschriebenen Polygons von 768 Seiten, wie in der Tafel des vorhergehenden §.; man kann alsdann das correspondirende umschriebene Polygon daraus berechnen.

Erste

Erste Abtheilung.

Zweyter Abschnitt.

Vom Flächeninhalt der Vielecke und von dem des Kreises.

§. 158.

Unter Fläche irgend einer Figur versteht man den zwischen den diese Figur begränzenden Linien enthaltenen Theil der Ausdehnung. Man nennt diese Ausdehnung auch den Flächeninhalt der Figur.

Es wird sehr zweckmäßig seyn, diese beyden Wörter von einander zu unterscheiden, und das Wort Flächeninhalt bey der oberflächlichen Ausdehnung zu brauchen, wenn man ihre wirkliche Größe dabey beabsichtigt; denn das Wort Fläche wird öfters gebraucht, nur die Form mit Abstraction von allen Gränzen anzugeben *); in diesem Sinne sollen sie in diesem Werke gebraucht werden.

---

*) Man sagt in der That eine krumme Fläche im Gegensatze einer Ebne oder einer ebnen Fläche, und um die Ausdehnung zu bestimmen, müßte man sagen, die Fläche einer krummen Fläche, welches ein sehr mangelhafter Ausdruck ist; hingegen ist der Ausdruck der Flächeninhalt einer krummen Fläche zugleich deutlich und correct. Nimmt man ihn an, so behält man zugleich die Analogie zwischen den Linien und

§. 159.

Es ist klar, und die Folge wird uns auch mehrere Beyspiele davon darbiethen, daß zwey Figuren von sehr verschiedener Gestalt gleichen Flächeninhalt haben können. Wir werden in der Folge diesen Umstand durch das Wort gleich ausdrücken, und zur Bezeichnung der ähnlichen Figuren, welche einander decken, werden wir den Ausdruck congruent brauchen.

§. 160.

In den Dreyecken und Parallelogrammen wählt man eine der Seiten willkührlich, welcher man den Nahmen der Basis, Grundlinie giebt, und die im Dreyecke von dem der Basis gegenüber stehenden Winkel im Parallelogramm von einem Puncte der gegenüber liegenden Linie herabgelassene senkrechte, wird die Höhe genannt.

BD und B′D Fig. 82. sind die Höhen der Dreyecke ABC, A′B′C′, wenn die Seiten AC und A′C′ zur Basis genommen werden. Man muß indessen in Erwägung ziehen, daß die senkrechte B′D′, welche außerhalb des Dreyecks A′B′C′ fällt, eigentlich auf der Verlängerung der Basis senkrecht steht.

Der Scheitel des der Basis gegenüber stehenden Winkels wird der Scheitel des Dreyecks genannt.

Die Gerade IK ist die Höhe des Parallelogramms

---

den Flächen bey, weil diese Wörter sich an den Formen anschließen; und das Wort Flächeninhalt ist im zweyten Falle eben das, was das Wort Länge im ersten ist.

EFGH. Es ist offenbar, daß sie unverändert bleibt, von welchem Puncte der Seite HG sie auch herabgelassen werden mag (§. 55.).

Es ist nicht minder klar, daß alle Dreyecke, deren Basis auf einerley Geraden, und deren Scheitel sämmtlich in einer dieser Basis parallelen Linie liegen, einerley Höhe haben; das heißt, daß die zwischen denselben Parallelen liegenden Dreyecke einerley Höhe haben. Die Dreyecke ABC, A′B′C′ und das Parallelogramm EFGH haben alle drey einerley Höhe, weil vermöge der Natur der Parallelen AF und BG die Geraden BD, B′D′ und IK einander gleich sind (§. 55.).

§. 161. Lehrsatz.

Zwey Parallelogramme von einerley Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

Beweis.

Da diese Parallelogramme gleiche Grundlinien haben, so kann man die des einen auf die des andern tragen, und da sie überdies einerley Höhe haben, so wird die der Basis parallele Seite des ersten auf die der Basis gegenüber stehende Seite des andern, oder auf ihre Verlängerung fallen, wie dieses Fig. 83. bey den Parallelogrammen ABCD, ABEF darstellt.

Dieses vorausgesetzt, sind die Dreyecke ADF, BCE gleich, weil die Seiten AD und BC, AF und BE, als gegenüber stehende Seiten der Parallelogramme, respectiv gleich, und auch die Winkel DAF, CBE, welche ihre Schenkel parallel und ihre Oeffnungen nach einerley Seite gerichtet haben, ebenfalls gleich sind. Zieht

man nun vom Vierecke ABCD einerseits das Dreyeck ADF und anderseits das Dreyeck BCE ab, so wird man nothwendigerweise zwey gleiche Größen erhalten, von denen eine das Parallelogramm ABEF, und die andre das Parallelogramm ABCD seyn wird.

§. 162. Lehrsatz.

Ein jedes Dreyeck ist die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Beweis.

Wenn man durch die Winkel B und C des Dreyecks ABC Fig. 84. die Geraden BD und CD respectiv den Seiten AC und AB parallel führt, so wird (§. 95.) die Fig. ABCD ein Parallelogramm seyn, welches mit dem vorgelegten Dreyecke einerley Grundlinie und Höhe hat (§. 160.). Da nun die Dreyecke ACC und BCD ihre Seiten AB und CD, AC und BD gleich (§. 54.) und überdies die Seite CB gemein haben, so sind sie einander gleich. Das Dreyeck ABC wird also die Hälfte des Parallelogramms ABCD seyn.

§. 163. Zusatz.

Hieraus folgt, daß zwey Dreyecke, welche einerley Grundlinie und Höhe haben, einander gleich sind. Denn diese Dreyecke werden nach dem Vorhergehenden Hälften von Parallelogrammen von einerley Grundlinie und Höhe, oder von gleichen Parallelogrammen seyn.

§. 164. Aufgabe.

Ein Polygon von einer gewissen Anzahl Seiten in

ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger habe, und ihm gleich sey.

Auflösung.

Es sey z. B. das Fünfeck ABCDE Fig. 85. Man verbinde die beyden Winkel E und C durch eine gerade Linie, und führe durch den Scheitel des zwischen den ersten liegenden Winkels E und EC die Gerade DF parallel, welche auf der Verlängerung der Seite AE einen Punct F bestimmen wird, der, mit dem Puncte C verbunden, das dem Fünfeck ABCDE gleiche Viereck ABCF bildet.

Um sich hiervon zu überzeugen, erwäge man nur, daß die Dreyecke CDE, CFE, welche auf einer und derselben Basis BC stehen, und zwischen den Parallelen CE und DF liegen, einander gleich sind (vorherg. §.), und daß das Fünfeck ABCDE und das Viereck ABCF erhalten wird, wenn man successiv jedes dieser Dreyecke mit dem Vierecke ABCE zusammen nimmt.

Das Verfahren leidet keine Veränderung, wenn selbst das Fünfeck ABCDE einen einwärts gehenden Winkel, wie in Fig. 86. hätte; nur ist für den Beweis zu merken, daß das Fünfeck ABCDE und das Viereck ABCF gebildet werden, wenn man vom Viereck ABCE die gleichen Dreyecke CDE und CFE abzieht.

Es ist klar, daß die vorhergehende Construction und Schlüsse bey jedem Vielecke ihre Anwendung finden.

§. 165. Zusatz.

Wenn man am Vierecke ABCF eine der vorhergehenden ähnliche Construction verrichtet, so kann man es

in ein ihm gleichen Dreyeck verwandeln; und durch eine Reihe ähnlicher Operationen kann man ein jedes Polygon in ein ihm gleiches Dreyeck verwandeln. Wenn man z. B. ein Sechseck hätte, so würde man dieses erstlich in ein Fünfeck, dieses letztere in ein Viereck, und dieses endlich in ein Dreyeck verwandeln.

§. 166. Lehrsatz.

Zwey Rechtecke von einerley Höhe ABCD und EFGH Fig. 87. verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Beweis.

Hier können wie in §. 58. die Grundlinien AB und EF beyder Parallelogramme einander commensurable oder incommensurable seyn.

Im ersten Falle wird man, wenn die Grundlinien AB und EF in Theile wie Ab, Ef getheilt, die ihrem gemeinschaftlichen Maaße gleich sind, und aus den Theilpuncten senkrechte Linien errichtet werden, in jedem der vorgelegten Rechtecke so viele einander gleiche Rechtecke einschreiben, als seine Grundlinie Theile hat; denn die Höhe aller kleinen Rechtecke ist der AD gleich, und alle ihre Grundlinien sind ebenfalls einander gleich. Das Verhältniß der Rechtecke ABCD und EFGH wird also offenbar den der Zahlen gleich seyn, welche angeben, wie viele kleinere Rechtecke in einem jeden von diesem enthalten sind; und diese Zahlen werden auch genau die in ihren Grundlinien AB und EF enthaltenen gleichen Theile angeben; man wird also haben

$$ABCO : EFGH = AB : EF.$$

In der Figur, woselbst das Rechteck ABCD in fünf

dem AbcD gleiche Theile, und das Rechteck EFGH in deren drey zerlegt ist, hat man

$$ABCD : EFGH = 5 : 3.$$

Wenn die Grundlinie AB und EF incommensurable sind Fig. 88., so kann man beweisen, daß das Verhältniß der Rechtecke ABOD und EFGH weder größer noch kleiner als das ihrer Grundlinien AB und EF seyn kann.

Denn wenn man

$$ABCD : EFGH = AB : EI$$

hätte, wo EI größer als EF ist, so könnte man sich AB in eine Anzahl kleinere Theile als FI getheilt denken, so daß, wenn man diese Theile von gegen F auf EF trüge, nothwendigerweise ein Theilpunct f zwischen F und I fiele. Errichtet man aus diesem Puncte die senkrechte fg, so würde man das Rechteck EfgH bilden, für welches man haben würde

$$ABCD : EfgH = AB : Ef,$$

weil die Grundlinien AB und Ef nach der Construction einander commensurable seyn würden; und vergleicht man diese Proportion mit der vorhergehenden, so könnte man daraus ziehen

$$EFGH : EfgH = EI : Ef;$$

welches nicht seyn kann, weil $EFGH < EfgH$ und $EI > Ef$.

Trägt man den Punct I auf die andre Seite von FG in I′, so könnte man eben so wenig haben

$$ABCD : EFGH = AB : EI,$$

weil, wenn man in f′ den mit f correspondirenden Theilungspunct trägt, für die einander commensurablen AB und EF haben würde

$$ABCD : Ef'g'H = AB : Ef',$$

welches noch auf die Proportion

$$EFGH : Ef'g'H = EI : Ef'$$

führen würde, welche unmöglich ist, weil

$$EFGH > Ef'g'H \text{ und } EI' < Ef'.$$

Da also das Verhältniß von ABCD zu EFGH weder größer noch kleiner, als das von AB zu EF seyn kann, so muß man nothwendigerweise haben

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

§. 167. Lehrsatz.

Jede zwey Rechtecke verhalten sich gegen einander wie die Producte ihrer Grundlinie und Höhe, oder, wie die Produkte der aneinander liegenden Seiten.

Beweis.

Wenn man auf der Höhe des Parallelogramms EFGH Fig. 89. einen Theil Eh der Höhe des Parallelogramms ABCD gleich nimmt, und die gerade gh der EF parallel führt, so hat man nach dem vorhergehenden Lehrsatz

$$ABCD : EFgh = AB : EF;$$

nimmt man dann Fg und FG für die Grundlinien der Parallelogramme EFgh und EFGH, welche dann einerley Höhe haben, so kann man daraus herleiten

$$EFgh : EFGH = Fg : FG;$$

multiplicirt man diese Proportionen nach der Ordnung, mit Beobachtung dessen, den beyden Gliedern des ersten zusammengesetzten Verhältnisses gemeinschaftlichen Factor EFgh aus, zu lassen, und statt Fg die ihr gleiche BC zu substituiren, so wird kommen

$$ABCD : EFGH = \overline{AB} \times \overline{BC} : \overline{EF} \times \overline{FG},$$

ein Resultat, welches den Vortrag des Satzes enthält *).

§. 168. Anmerkung.

Da Größen messen nichts anders heißt, als die von

---

*) Ich habe oben die Multiplication nach der Ordnung gebraucht, als das einfachste Mittel zum gesuchten Resultate zu gelangen; man könnte indessen in dieser Veränderung einige Schwierigkeiten finden, da man darin Flächen in einander zu multipliciren scheint. Diese Schwierigkeit verschwindet, wenn man sich vorstellt, daß diese Flächen, um mit einander verglichen werden zu können, nach einer zum gemeinschaftlichen Maaß, oder zur Einheit genommenen Fläche bestimmt sind. Man würde also in diesen Uebergang weit mehr Eleganz bringen, wenn wir ihn folgendermaßen bewirkten:

Die Proportionen
$$ABCD : EFgh = AB : EF$$
$$EFgh : EFGH = Fg : FG$$
geben
$$\frac{EFGH}{ABCD} = \frac{EF}{AB}$$
$$\frac{EFGH}{EFgh} = \frac{FG}{Fg}$$

welches keine Dunkelheit darstellt, weil es bloß auf Verhältnisse homogener Größen ankommt. Dieses vorausgesetzt, so wird, da $\frac{EF}{AB}$ angiebt, wie oft der Bogen ABCD in EFgh, und $\frac{FG}{Fg}$, wie oft EFGH die Folge EFgh enthält, die Anzahl Mahl, welche die erste in der zweyten enthatten ist, durch

$$\frac{EF}{AB} \times \frac{FG}{Fg} = \frac{\overline{EF} \times \overline{FG}}{\overline{AB} \times \overline{BC}}$$

ausgedrückt seyn, wenn man die zur gemeinschaftlichen Einheit angenommenen Geraden beybehält.

einerley Art mit einander vergleichen, so ist offenbar, daß das Messen der Flächen zum Zwecke haben muß zu bestimmen, wie oft irgend eine Fläche eine andre als Einheit genommene enthält. So heißt z. B. das Rechteck ABCD Fig. 90. messen, nichts anders als untersuchen, wie viel Mahl dieses Rechteck ein Quadrat abcd enthält, in welchem man annimmt, daß die Seite ab der zum gemeinschaftlichen Maaße der Längen der Geraden genommenen Linie gleich sey; und nach dem Vorhergehenden hat man, wenn man die Basis und Höhe AB und BC des Parallelogramms ABCD nach demselben gemeinschaftlichen Maaß bestimmt denkt

$$\text{abcd} : \text{ABCD} = \overline{\text{ab}} \times \overline{\text{bc}} : \overline{\text{AB}} \times \overline{\text{BC}},$$

oder

$$= 1 : \frac{\text{AC}}{\text{ab}} \times \frac{\text{BC}}{\text{bc}};$$

welches uns lehrt, daß das Rechteck ABCD das andre Rechteck abcd, oder die als Einheit genommene Fläche so oft enthält, als das Product, welches gebildet wird, wenn man die Anzahl der in seiner Grundlinie AB enthaltenen Längeneinheiten durch die in seiner Höhe enthaltenen Einheiten multiplicirt, die Zahleneinheit enthält, ein Ausdruck, dessen Richtigkeit einleuchtend ist, weil die Verhältnisse darin auf Zahlen reducirt sind. Nur zur Abkürzung ersetzt man ihn durch folgenden: der Flächeninhalt eines Rechtecks ist dem Producte aus der Grundlinie in die Höhe gleich; man muß indessen immer im Stande seyn das hinzu zu fügen, was in der zweyten ausgelassen ist.

Die Wahrheit des vorhergehenden Satzes ergiebt sich aus dem bloßen Anblick der Figur, wenn die Seite des zum gemeinschaftlichen Maaße genommenen Quadrats, in der Grundlinie und Höhe des Rechtecks ABCD genau enthalten ist. Führt man dann durch alle Theilpuncte der Höhe BC zur Grundlinie AB parallele Gerade ef, so wird man das Rechteck ABCD in so viele gleiche Rechtecke oder Streifen theilen, als die Höhe die Linie ab enthält; und jeder dieser Streifen wie ABef kann in so viele dem abcd gleiche Quadrate Begh getheilt werden, als die Zahl, welche angiebt, wie oft ab in AB enthalten ist. Die ganze Anzahl der im Rechteck ABCD enthaltenen und dem Bedh gleichen Quadrate, wird also der der Streifen ABef multiplicirt durch die Anzahl der in jedem enthaltenen Quadrate, welches dem Product aus der Anzahl der Längeneinheiten der Grundlinie durch die Anzahl der Längeneinheiten der Höhe gleich ist.

§. 169. Erster Zusatz.

Wenn die beyden Seiten des Rechtecks, AB und BC, einander gleich wären, in welchem Falle es sich in ein Quadrat verwandelt, so wird sein Flächeninhalt von der zweyten Potenz seiner Seite AB gemessen; das heißt, es wird das als Einheit genommene Quadrat so oft enthalten, als die zweyte Potenz der in seiner Seite enthaltenen Längeneinheiten, die Zahleneinheit enthält: und daher rührt es, daß man die zweyte Potenz einer Zahl auch ihr Quadrat nennt.

§. 170. Zweyter Zusatz.

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms wird

vom Producte aus seiner Grundlinie in dessen Höhe gemessen; denn da alle Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe einander gleich (§. 161.), so ist ein jedes Parallelogramm einem Rechtecke gleich, welches mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat. Man kann ferner schließen, daß, da sich irgend zwey Parallelogramme wie ihre respectiven Maaße verhalten, diese im Verhältnisse der Producte der Grundlinien und Höhen zu einander seyn werden, und daher wie ihre Grundlinien, wenn die Höhen gleich sind, oder wie ihre Höhen, wenn ihre Grundlinien gleich sind.

§. 171. Dritter Zusatz.

Der Flächeninhalt eines Dreyecks wird von der Hälfte des Products aus der Grundlinie in die Höhe gemessen, weil ein jedes Dreyeck die Hälfte eines Rechtecks ist, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. Da nun die Hälften sich wie die Ganzen verhalten, so verhalten sich jede zwey Dreyecke gegen einander, wie die Parallelogramme, von denen sie einen Theil ausmachen, und folglich wie die Producte ihrer Grundlinie und Höhe (vorherg. §.), oder wie ihre Grundlinien, wenn ihre Höhen gleich sind, und wie ihre Höhen, wenn ihre Grundlinien gleich sind.

§. 172. Aufgabe.

Ein Parallelogramm oder ein gegebenes Dreyeck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung.

1) Man suche die Seite FG des dem gegebenen Pa-

rallelogramme gleichen Quadrats ABCD Fig. 91., indem eine mittlere Proportionale zwischen der Grundlinie AB und der Höhe DE dieses Parallelogramms sucht.

Denn durch diese Construction hat man

$$AB : FG = FG : DE,$$

woraus man zieht

$$\overline{AB} \times \overline{DE} = \overline{FG^2},$$

und da $\overline{AB} \times \overline{DE}$ das Maaß des Flächeninhalts des vorgelegten Parallelograms, und $\overline{FG^2}$ der des auf FG construirten Quadrats EFGH ist, so wird diese letztere Figur der ersten gleich seyn.

2) In Betreff des Dreyecks A′B′D′, so muß man zwischen der Grundlinie A′B′ und der halben Höhe D′E′ die mittlere Proportionale FG nehmen, weil man alsdann hat

$$A'B' : FG = FG : D'E',$$

woraus folgt

$$\tfrac{1}{2}\overline{A'B'} \times \overline{D'E'} = \overline{FG^2};$$

das erste dieser Producte drückt wirklich den Flächeninhalt des Dreyecks, und das andre den des Quadrats aus.

§. 173. Zusatz.

Vermittelst der vorhergehenden Aufgabe kann man ein jedes beliebige Vieleck in ein ihm gleiches Quadrat verwandeln; man muß es nehmlich zuvörderst nach dem Verfahren des §. 164. in ein Dreyeck verwandeln, welches man dann in ein Quadrat verwandelt.

§. 174. Anmerkung.

Da jedes Vieleck in Dreyecke verwandelt werden

kann (§. 79.), so findet man seinen Flächeninhalt, wenn man jedes der darin enthaltenen Dreyecke berechnet, und dann die Summe der Resultate nimmt.

§. 175. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines Vierecks ABCD Fig. 92. in welchem zwey Seiten parallel sind, und welches man aus dieser Ursache ein Trapezium nennt, hat zum Maaße das Product aus der halben Summe der parallelen Seiten AB und CD, multiplicirt durch die zwischen ihnen genommenen Höhe.

Beweis.

Wenn man die Diagonale CB zieht, so wird das Trapez in zwey Dreyecke ABC und BCD zerlegt, deren gemeinschaftliche Höhe EF ist; und da

$$ABCD = ABC + BCD, \quad ABC = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{EF},$$

$$BCD = \tfrac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{EF}$$

so wird man haben

$$ABCD = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{EF} + \tfrac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{EF}$$

$$= \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,EF,$$

welches der Vortrag des Lehrsatzes ist.

Es ist zu merken, daß die aus der Mitte G einer der nicht parallelen Seiten des Trapeziums geführte Gerade GH der Größe $\frac{1}{2}(AB + CD)$ gleich ist. Denn da auch der Punct H auf der Mitte von BD ist (§. 58.), so zeigt die Aehnlichkeit der Dreyecke BCD und BHI, daß $IH = \frac{1}{2}CD$, und die der Dreyecke ACB und GCI beweist auch, daß $GI = \frac{1}{2}AB$, woraus folgt

$$GH = GI + IH = \tfrac{1}{2}(AB + CD).$$

Da die Gerade GH auch die EF in zwey gleiche Theile theilt (§. 58.), so findet sie sich in gleicher Entfernung von den parallelen Seiten des Trapeziums, und man kann folglich sagen, daß der Flächeninnhalt eines Trapeziums zu seinem Maaße habe, das Product aus seiner Höhe, multiplicirt durch eine in gleicher Entfernung von beyden parallelen Seiten geführte Linie.

§. 176. Lehrsatz.

Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate der in diesen Polygonen homologen Seiten.

Beweis.

1) Wenn die vorgelegten Polygone irgend zwey Dreyecke ABC und abc Fig. 93. sind, so sind die durch die Höhen derselben gebildeten Dreyecke ADC und adc einander ähnlich, weil sie außer dem rechten Winkel D und d auch die Winkel A und a gleich haben; man wird also haben

$$CD : cd = AC : ac;$$

aber wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ABC und abc hat man auch

$$AB : ab = AC : ac;$$

multiplicirt man diese beyden Proportionen nach der Ordnung, und dividirt die beyden Glieder des ersten Verhältnisses der zusammen gesetzten Proportion durch 2, so wird kommen

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{CD} : \tfrac{1}{2}\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{AC^2} : \overline{ac^2},$$

ein Resultat, dessen beyde ersten Glieder die respectiven

Flächeninhalte der Dreyecke ABC und abc ausdrücken (§. 171.); man wird folglich haben

$$ABC : abc = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

2) Da ähnliche Polygone, wie ABCDE, abcde Fig. 46., in eine gleiche Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Dreyecke zerlegt werden können (§. 87.), so wird sich jedes Dreyeck des ersten Polygons zum correspondirenden des zweyten verhalten, wie das Quadrat einer der Seiten des ersten Polygons zum Quadrat der homologen Seite des zweyten; man wird also haben

$$ABC : abc = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$
$$AEC : aec = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2$$
$$EDC : edc = \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2.$$

Aber die Aehnlichkeit der Polygone giebt diese Reihe gleicher Verhältnisse:

$$AB : ab = AE : ae = ED = ed,$$

aus welcher man zieht

$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 = \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2;$$

dieses beweist die Gleichheit der Verhältnisse eines jeden Dreyecks des einen Polygons mit dem ihm correspondirenden im andern, woraus erfolgt

$$ABC : abc = AEC : aec = EDC : edc.$$

Aus dieser letztern Reihe gleicher Verhältnisse kann man herleiten

$$ABC + AEC + EDC : abc + aec + edc = ABC : abc,$$

oder

$$ABCDE : abcde = ABC : abc = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Dieselben Schlüsse werden offenbar bey jeder Anzahl Seiten der vorgelegten Polygone statt haben.

§. 177.

§. 177. Lehrsatz.

Das auf der Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks ABE Fig. 94. construirte Quadrat AEHL, ist der Summe der auf den beyden Catheten dieses Dreyecks construirten Quadrate ABCD und BEFG gleich.

Beweis.

Wir könnten diesen Satz mit Recht aus dem des §. 75. herleiten, in welchem wir bewiesen haben, daß $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, und weil nach §. 169. $\overline{AB}^2$, $\overline{BE}^2$, $\overline{AE}^2$, respectiv die Maaße der Quadrate ABCD, BEFG, AEHL sind. Wir haben es indessen angemessener gefunden, diesen Satz, wie Euclid, unmittelbar aus den Flächen, und ohne Anwendung der Verhältnisse der Linien zu beweisen.

In dieser Absicht muß man vom rechten Winkel B des Dreyecks ABE auf die Hypothenuse AE die senkrechte BK fällen, sie bis I verlängern, und dann die Geraden DE und BL ziehen. Da das Dreyeck DAE mit dem Quadrate ABCD einerley Basis AD hat, und zwischen denselben Parallelen AD und CE enthalten ist, so wird es der Hälfte dieses Quadrats gleich seyn (§. 162.); das Dreyeck BAL wird der Hälfte des auf seiner Basis AL construirten, und mit ihm zwischen denselben Parallelen AL und BI enthaltenen Rechtecks AKIL gleich seyn. Nun sind die Dreyecke DAE und BAL einander gleich, weil der aus dem rechten DAE und dem Winkel BAE zusammen gesetzte Winkel DAB, dem aus einem rechten EAL und dem Winkel BAE zusammen gesetzten BAL gleich ist, und weil ferner die

Seiten AD und AB, AL und AE, respectiv als Seiten eines und desselben Quadrats gleich sind; es ist also die Hälfte des Quadrats ABCD der des Rechtecks AIKL gleich; und es wird folglich auch das Quadrat ABCD selbst, dem Rechtecke AIKL gleich seyn. Auf gleiche Weise kann man beweisen, daß das Quadrat BEFG dem Rechteck EHIK gleich ist; und es folgt hieraus, daß das aus den beyden Rechtecken AKIL und EHIK zusammen gesetzte Quadrat AEHL der Summe der Quadrate ABCD und BEFG gleich ist.

§. 178. Erster Zusatz.

Da die Rechtecke AKIL, EHIK mit dem Quadrate AEHL einerley Höhe AL haben, so verhalten sie sich gegen einander wie ihre Grundlinien (§. 170.), so daß man haben wird

ABCD : BEFG : AEHL = AK : KE : AE;

das heißt, die auf den Catheten eines rechtwinklichten Dreyecks construirten Quadrate verhalten sich zu dem auf der Hypothenuse errichteten, wie die an einander liegenden Abschnitte AK und KE sich zur ganzen Hypothenuse AE verhalten.

§. 179. Zweyter Zusatz.

Da die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke sich wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten dieser Polygone verhalten (§. 176.), so wird man, wenn auf den Catheten des rechtwinklichten Dreyecks ABE und auf dessen Hypothenuse AE Fig. 95. drey ähnliche Vielecke X, Y und Z errichtet werden, folgende Proportionen erhalten

$$X : Y : Z = \overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 : \overline{AE}^2,$$

woraus man zieht

$$X + Y : Z = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 : \overline{AE}^2,$$

und vermittelst des vorhergehenden Lehrsatzes, welcher $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$ giebt, kann man schließen $X + Y = Z$; das heißt, daß das auf der Hypothenuse construirte Polygon der Summe der beyden andern gleich ist.

§. 180. Aufgabe.

Ein Vieleck zu construiren, welches einem andern ähnlich sey, und dessen Flächeninhalt zu dem des ersten ein gegebenes Verhältniß habe, oder einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Auflösung.

Im ersten Falle kann man, wenn bc Fig. 96. eine der Seiten des gegebenen Polygons bezeichnet, und das Verhältniß der Fläche dieses Polygons zu dem des gesuchten durch irgend zwey gerade Linien M und N ausgedrückt ist, auf eine unbegränzte Gerade AE zwey Theile AK und KE tragen, welche in demselben Verhältnisse sind; auf die Summe AE, als Durchmesser, beschreibe man einen Halbkreis; man errichte die senkrechte BK, und ziehe die Sehnen AB und BE; endlich trage man auf AB von B in C die Seite bc der ersten Figur, und nachdem man CD zu AE parallel geführt hat, erhält man in BD diejenige Seite, welche im gesuchten Polygon der bc homolog ist. Die Aufgabe ist alsdann darauf zurückgeführt, auf BC ein dem Polygon X ähnliches

Vieleck zu construiren, welches sich nach dem Verfahren des §. 90. leicht bewerkstelligen läßt.

Um die vorhergehende Construction einzusehen, leite man zuvörderst aus den einander ähnlichen Dreyecken ABE und CBD diese Proportionen her

$$AB : BE = BC : BD$$

und

$$\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{BD}^2;$$

aber nach §. 178. ist

$$\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 = AK : KE \text{ oder } = M : N;$$

also

$$\overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 = M : N;$$

mithin wird das auf BC construirte Vieleck zu dem auf BD construirten im Verhältniß von M zu N seyn, wie es der Vortrag der Aufgabe erfordert.

Wenn die Seite bc der Figur X die AB übertreffen sollte, so würde man diese Linie bis in C′ verlängern, allein die Construction und der Beweis würden deshalb keine Aenderungen erleiden.

In dem Falle, wo der Flächeninhalt des gegebenen Polygons einem gegebenen Quadrat N^2 gleich werden soll, würde man auch das gegebene Polygon in ein Quadrat verwandeln, und wenn M^2 dieses Quadrat vorstellt, so würde man haben

$$\overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 = M^2 : N^2,$$

woraus folgt

$$M : N = BC : BD;$$

BD könnte also durch Proportionallinien (§. 62.) erhalten werden, oder man könnte AK und KE im Verhältniß der Quadrate M^2 und N^2 nehmen.

§. 181. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines regulären Vielecks hat zum Maaße die Hälfte des Products aus seinem Umfange in den Halbmesser des darin eingeschriebenen Kreises.

Beweis.

Dieses Vieleck kann in so viele einander gleiche Dreyecke zerlegt werden, als es Seiten hat (§. 39.); eins dieser Dreyecke, wie ABO Fig. 73., hat zum Maaß $\frac{1}{2}\overline{AB} \times OG$; und wiederholt man dieses Product so viel Mahl als das Polygon Seiten hat, so erhält man, wenn N diese Zahl bezeichnet

$$\tfrac{1}{2}N \times \overline{AB} \times \overline{BG};$$

da aber $N \times AB$ der Umfang oder der Perimeter des Polygons ist, so erhält man, wenn man diesen durch P bezeichnet

$$\tfrac{1}{2}P \times OG.$$

§. 182. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze und dem des §. 140. folgt, daß die Flächeninhalte der regulären Vielecke von einerley Anzahl Seiten, welche sich wie die Quadrate ihrer Seiten verhalten, sich auch wie die Quadrate der Halbmesser der Kreise verhalten müssen, in denen sie eingeschrieben, oder um welche sie beschrieben sind. Denn man hat successiv

$$ABCDEF : abcdef = \overline{AB^2} : \overline{ab^2},$$

$$AB : ab = AO : ao \text{ (§. 140.)}$$

$$\overline{AB^2} : \overline{ab^2} = \overline{AO^2} : \overline{ao^2},$$

mithin

$$ABCDEF : abcdef = \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2.$$

Auf eben die Art findet man

$$ABCDEF : abcdef = \overline{OG}^2 : \overline{og}^2,$$

wenn man in Erwägung zieht, daß

$$AO : ao = OG : og \text{ (§. 140.)}.$$

§. 183. Anmerkung.

Wendet man die vorhergehenden Betrachtungen auf die in einem und demselben Kreise eingeschriebenen und umschriebenen Kreise an, so wird man leicht einsehen, daß man immer eingeschriebenes und ein dergleichen umschriebenes Vieleck von der Beschaffenheit finden könne, daß die Differenz ihrer Flächeninhalte kleiner als jede gegebene Größe sey, so klein auch diese Größe seyn mag.

Denn man hat offenbar in Fig. 81.

$$ABCDE : abcde = \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2;$$

bezeichnet man nun den Flächeninhalt des umschriebenen Polygons durch P; und den des eingeschriebenen Polygons durch p, so wird man haben

$$P : p = \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2,$$

$$P - p : P = \overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2 : \overline{Oa}^2,$$

woraus folgt

$$P - p = \frac{P(\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2)}{\overline{Oa}^2},$$

ein Werth, in welchen man den Factor $\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2$ so

klein als man will nehmen kann, wenn die Seiten der Polygone vermehrt werden *).

§. 184. Zusatz.

Da der Flächeninhalt des umschriebenen Polygons offenbar größer als der Kreis ist, indessen das eingeschriebene kleiner als derselbe ist, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß man immer ein reguläres Polygon, es sey ein eingeschriebenes, oder ein umschriebenes, finden kann, dessen Flächeninhalt um so wenig, als man will, von dem eines gegebenen Kreises unterschieden ist. Man braucht in dieser Absicht nur ein Polygon von einer so großen Anzahl Seiten zu nehmen, daß die Differenz zwischen dem eingeschriebenen und umschriebenen Polygon nicht größer als die gegebene Größe sey.

---

*) Dieselbe Behauptung läßt sich auch folgendermaßen erweisen: Die Differenz des Flächeninhalts des umschriebenen Polygons ABCDE von dem eingeschriebenen a′b′c′d′e′ ist aus so vielen Dreyecken wie aAb zusammen gesetzt, als diese Polygone Seiten haben (§. 149.). Da nun der Flächeninhalt dieses Dreyecks durch $\frac{1}{2}ab \times AG$ gemessen wird, so erhält man, wenn man diesen Ausdruck durch die Anzahl der Seiten, die ich N setze, multiplicirt $\frac{1}{2}N \times \overline{ab} \times AG$; erwägt man ferner, daß $N \times ab$ der Umkreis des eingeschriebenen Polygons ist, und bezeichnet man diesen durch p′, so wird man haben $\frac{1}{2}p' \times \overline{AG}$; woraus folgt, daß die Differenz des Flächeninnhalts des eingeschriebenen und des umschriebenen Polygons, einem Rechtecke gleich ist; welches den halben Umfang des eingeschriebenen Polygons zur Grundlinie, und die AG zur Höhe hat, welche man offenbar so klein, als man will, machen kann, wodurch auch gedachtes Rechteck kleiner als jedes Rechteck werden kann.

§. 185. Lehrsatz.

Wenn drey Größen A, B, X so beschaffen sind, daß die erste A, welche man als veränderlich, aber gleichwohl immer größer als jede der beyden andern B und X annimmt, die unveränderlich sind, sich beyden zugleich um so viel als man will nähern kann, so muß man nothwendigerweise haben $B = X$.

Beweis.

Es sey 1) $X > B$, so hat man vermöge des Vortrages

$$A > X, \quad X > B,$$

woraus folgt, daß wenn A dergestalt gewählt wird, daß die Differenz $A - B$ kleiner als irgend eine Größe δ ist, um so mehr die Differenz $X - B$ kleiner als δ seyn wird.

2) Hat man $X < B$, so wird man haben

$$A > B, \quad B > X;$$

und nimmt man A dergestalt, daß $A - X$ kleiner als δ ist, so muß um so mehr $B - X$ kleiner als δ seyn.

Die obigen Schlüsse führen darauf zu beweisen, daß die Differenz der zwey unveränderlichen Größen X und B nothwendigerweise kleiner als jede gegebene noch so kleine Größe sey, und daß mithin $B = X$ (§. 153.).

§. 186. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines Kreises hat zum Maaße das halbe Product aus dem Umkreise in dem Halbmesser, oder $\frac{1}{2}CR$, wenn man den Umkreis C und den Halbmesser R nennt.

Beweis.

Je größer die Anzahl der Seiten eines umschriebenen Polygons wird, desto mehr nähert sich sein Perimeter P dem des Kreises (§. 152.), und desto mehr nähert sich auch $\frac{1}{2}$PR der Größe $\frac{1}{2}$CR, die sie zwar immer, jedoch um so wenig als man will, übertreffen wird. Andrerseits kann sich der Flächeninhalt dieses Polygons, welcher immer größer als der des Kreises ist, sich diesem letztern so viel als man will nähern (§. 184.). Die Producte $\frac{1}{2}$ PR, $\frac{1}{2}$CR, und das wahre Maaß der Kreisfläche, sind also drey Größen von denselben Umständen, wie die Größen A'B und X des vorhergehenden §.; es muß also $\frac{1}{2}$CR das wahre Maaß des Kreises seyn *).

---

*) Man beweist unmittelbar, daß daß Maaß der Kreisfläche weder größer noch kleiner als $\frac{1}{2}$CR seyn kann; denn wenn der erste Fall statt fände, so würde $\frac{1}{2}$CR das Maaß eines kleinern Kreises seyn, als der dessen Halbmesser = R, da indessen, wenn in diesem letztern Kreise ein größerer Kreis als der zweyte eingeschrieben wird (m. s. Anmerk. §. 154.), dieses Polygon nichts desto weniger ein kleineres Product als $\frac{1}{2}$CR zum Maaße haben wird, weil sein Umkreis und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises respectiv kleiner als C uud R sind.

Eben so wenig kann man annehmen, daß das Product $\frac{1}{2}$CR das Maaß eines größern als des vorgelegten Kreises sey; denn wenn man in den größern Kreis ein Polygon einschreibt, welches den vorgelegten Kreis übertrift, so wird dieses Polygon ein größeres Maaß haben, als das, welches man für den Kreis, in welchen es eingeschrieben ist, angenommen hat.

§. 187. Zusatz.

Hieraus folgt, daß sich die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser zu einander verhalten. Denn da (§. 154.)

$$C : C' = R : R',$$

so erhält man, wenn man durch die Proportion

$$\tfrac{1}{2}R : \tfrac{1}{2}R' = R : R',$$

welche für sich klar ist, multiplicirt,

$$\tfrac{1}{2}CR : \tfrac{1}{2}C'R' = R^2 : R'^2,$$

eine Proportion, in welcher die beyden Glieder des ersten Verhältnisses, nach dem Vorhergehenden, die Maaße des Flächeninhalts der Kreise sind, welche R und R′ zu ihren Halbmessern haben. Es ist ferner klar, daß

$$R^2 : R'^2 = D^2 : D'^2,$$

wenn D und D′ die Durchmesser bezeichnen, weil $D = 2R$, $D' = 2R'$; mithin hat man auch

$$\tfrac{1}{2}CR : \tfrac{1}{2}C'R' = D^2 : D'^2.$$

Bezeichnet man den Umkreis, dessen Durchmesser 1 ist, durch π, so wird der Flächeninhalt dieses Kreises $\frac{1}{4} \times \pi = \frac{1}{4}\pi$ seyn; man wird also haben

$\frac{1}{4}\pi : \frac{1}{2}C'R' = 1 : D'^2$, woraus folgt $\frac{1}{2}C'R = \frac{1}{4}\pi D'^2$; welches uns lehrt, daß der Flächeninhalt eines Kreises gefunden wird, wenn man das Quadrat seines Durchmessers durch den vierten Theil der Zahl multiplicirt, welche das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser angiebt. Setzt für D^2 dessen Werth $4R^2$, so erhält man πR^2, oder das Quadrat des Halbmessers multiplicirt durch das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser.

§. 188. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt der Figur AFBO Fig. 97., welche

von zweyen unter irgend einem Winkel gegen einander liegenden Halbmessern, und dem Kreisbogen AFB begränzt wird, welche Figur ein Ausschnitt des Kreises heißt, hat zu ihrem Maaße das halbe Product aus dem Bogen AFB in den Halbmesser AO.

Beweis.

Wenn man aus dem Mittelpuncte O auf den Durchmesser AE die senkrechte DO errichtet, so werden die Seiten des rechten Winkels AOD und der Bogen ABD offenbar den vierten Theil der Zirkelfläche einschließen; und die Schlüsse des §. 109. beweisen, daß sich der Flächeninhalt des Ausschnitts AFBO zu dem des Ausschnitts AOD verhält, wie der Bogen AFB zum Bogen AD. Da aber der Flächeninhalt des Ausschnitts AOD der vierte Theil von dem des Kreises ist, so wird man haben

$$AOD = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2}C \times \overline{AO} = \tfrac{1}{8}C \times \overline{AO},$$

und die oben vorgetragene Proportion

$$AFBO : AOD = AB : AD \text{ oder } \tfrac{1}{4}C,$$

wird alsdann

$$AFBO : \tfrac{1}{8}C \times \overline{AO} = \overline{AB} : \tfrac{1}{4}C;$$

welches geben wird

$$AFBO = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{AO},$$

wie es der Vortrag des Satzes angiebt.

§. 189. Anmerkung.

Man erhält den vom Bogeu AFB und der Sehne AB eingeschlossenen Raum AFBA, welcher ein Segment, Abschnitt des Kreises genannt wird, wenn man vom Flächeninhalte des Ausschnitts AFBO den des Dreyecks ABO abzieht.

Zweyte Abtheilung.

Erster Abschnitt.

Von den Ebnen und den von ebnen Flächen begränzten Körpern.

Von den Ebnen und geraden Linien.

§. 190.

Da eine gerade Linie in ihrer ganzen Richtung an einer Ebne anschließt (§. 2.), so ist klar, daß eine gerade Linie, welche zwey Puncte in einer Ebne hat, ganz in dieser Ebne liegen muß; denn widrigenfalls könnte man durch zwey Puncte mehrere gerade Linien legen, von denen eine zwischen den zweyen Puncten in der Ebne gezogen seyn würde, und die andern ihre Verlängerungen außerhalb der Ebne haben würden, welches dem Begriff einer geraden Linie widerspricht.

§. 191.

Der Durchschnitt zweyer Ebnen ist eine gerade Linie; er ist erstens eine Linie nach den Erklärungen des §. 1.; und denkt man sich durch zwey Puncte dieses

---

Allgemeine Voraussetzung. Im Folgenden wird immer vorausgesetzt, daß die Figuren den Raum vermittelst ihrer drey Dimensionen einnehmen. Die punctirten Linien bezeichnen die, welche hinter den Ebnen liegen.

Durchschnitts eine gerade Linie gezogen, so muß diese zugleich in jeder dieser Ebnen liegen (vorherg. §.); sie kann also nur ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt seyn.

§. 192.

Durch eine und dieselbe gerade Linie AB Fig. 98. kann man eine unendliche Anzahl verschiedener Ebnen CD, EF, GH ꝛc. legen. Um sich hiervon zu überzeugen, erwäge man nur, daß eine Ebne immer um eine durch zwey ihrer Puncte gezogene gerade Linie gedreht werden, und solchergestalt eine unendliche Anzahl verschiedener Lagen annehmen kann, ohne daß diese Puncte ihre Stelle ändern; man sieht aber leicht ein, daß diese Ebne ruhig bleiben muß, wenn man außerhalb dieser Linie einen Punct annimmt, durch welchen sie gehen muß, so wie es eine gerade Linie durch zwey Puncte ist.

Dieser Satz kann auch bewiesen werden, wenn man darthut, daß zwey Ebnen, welche drey Puncte A, B, C Fig. 99. gemein haben, in ihrer ganzen Ausdehnung auf einander fallen müssen; und in dieser Hinsicht erwäge man nur, daß wenn man von irgend einem auf einer dieser Ebnen genommenen Puncte E, eine gerade Linie EF zieht, welche zwey der Linien AB, AC und BC, die je zwey und zwey der gemeinschaftlichen Puncte verbinden, und daher zugleich auf beyden Ebnen liegen (§. 190.), diese Gerade EF auch beyden Ebnen gemein seyn muß, weil sie darin die beyden Puncte e und f hat, worin sie die AB und AC schneidet.

§. 193.

Zwey einander schneidende Linien liegen folglich in

einerley Ebne; denn wenn man durch eine derselben, z. B. durch AB und durch einen auf der andern BC genommenen Punct C, eine Ebne gehen läßt, so wird diese letztere, welche zwey Puncte B und C in dieser Ebne hat, auch ganz darin liegen (§. 190.).

Hieraus folgt, daß wenn man von dreyen im Raume genommeneu Puncten, je zwey und zwey durch gerade Linien verbindet, das hieraus erfolgende Dreyeck ABC gänzlich in einerley Ebne liegen wird.

Anders verhält es sich bey vier aufs Gerathewohl genommenen Puncten; die durch drey derselben gehende Ebne wird nicht immer durch den vierten gehen; und das hieraus erfolgende Viereck wird mithin nicht in einerley Ebne liegen.

§. 194.

Die Parallellinien sind vermöge ihrer Definition immer in einerley Ebne; man muß indessen in Erwägung ziehen, daß im Raume zwey Linien auf einer und derselben dritten senkrecht seyn können, ohne einander parallel zu seyn, und ohne sich zu schneiden; denn man kann alsdann durch einen einzigen Punct auf eine und dieselbe Gerade so viele senkrechte Linien ziehen, als nur irgend möglich ist, d. h. eine unendliche Anzahl. Die Geraden AC, AE, AG Fig. 98. können alle auf AB senkrecht seyn, die erste in der Ebne GD, die zweyte in der Ebne EF, die dritte in der Ebne GH. Wenn dieses auch bey den Linien BD, BF und BH der Fall ist, so werden BD und AC parallel seyn, weil sie auf einer und derselben Geraden in der Ebne CD senkrecht sind;

allein diese Geraden werden mit keiner der übrigen parallel seyn.

§. 195. Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie CD Fig. 100. auf dem Durchschnitte zweyer geraden Linien DE und DF in einer Ebne AB senkrecht ist, so wird sie auch auf jeder durch den Punct D in derselben Ebne geführten Geraden senkrecht seyn.

Beweis.

Es sey DG eine dritte durch den Punct D in der Ebne AB auf irgend eine Art geführte gerade Linie; man nehme auf den Geraden DE und DF, und auf ihren Verlängerungen, die einander gleichen Theile DE, DF, De, Df; man ziehe alsdann vom Puncte C die Geraden CE, CF, Cc, Cf, und ziehe ferner die Geraden EF und ef. Nachdem dieses geschehen, werden die Dreyecke EDF und eDf, welche einen zwischen gleichen Seiten liegenden Winkel gleich haben, einander gleich seyn, und EF = ef geben. Die schiefen Linien CF und Cf, CE und Ce sind einander gleich, weil sie vom Fuße der senkrechten CD gleiche Entfernung haben (§. 27.); mithin werden auch die Dreyecke ECF und eCf, deren Seiten stückweise gleich sind, ebenfalls einander gleich seyn. Endlich werden die Dreyecke DEG und Deg (§. 18.) einander gleich seyn, weil die Seiten DE und De nach der Construction gleich, die Winkel GED und geD als zu gleichen und gleichschenklichten Dreyecken gehörig, einander gleich, und weil endlich auch die Winkel EDG, eDg als Scheitelwinkel gleich sind;

es ist also GE = ge, GD = gD. Da nun die Dreyecke ECG und eCg einander gleich sind, weil die Winkel GEC und geC, so wie die Seiten CE und Ce als zu den gleichen und gleichschenklichten Dreyecken ECF, eCf gehörig, einander gleich, und auch die Seiten GE und ge, als zu den Dreyecken EDG und eDg gehörig, einander gleich sind: so wird man haben CG = Cg; mithin ist CD in der Ebne des Dreyecks GCg auf GD senkrecht (§. 30.).

§. 196. Anmerkung.

Da die Linie CD auf alle Linien, welche man durch ihren Durchschnittspunct mit dieser Ebne ziehen kann, senkrecht fällt, und sich daher von keiner Seite gegen diese Ebne neigt, so ist sie auf derselben senkrecht.

§. 197. Lehrsatz.

Wenn drey gerade Linien ED, FD, GD Fig. 101. auf einer und derselben Geraden CD, in einem und demselben Punct D senkrecht stehen, so sind alle drey in einer und derselben auf dieser letztern senkrechten Ebne.

Beweis.

Wäre dies nicht der Fall, so könnte man durch die beyden Geraden ED und FD eine Ebne AB legen, auf welcher CD senkrecht wäre, und welche die durch GD und CD gelegte Ebne GDC in einer Geraden GD schneiden würde, welche ebenfalls auf CD senkrecht wäre (§. 195.); man hätte alsdann auf einer und derselben Geraden, durch einerley Punct und in einerley Ebne zwey senkrechte gezogen, welches unmöglich ist (§. 32.).

§. 198. Lehrsatz.

Aus einem und demselben, es sey außerhalb der Ebne oder auf derselben genommenen Puncte, kann nur eine einzige auf dieser Ebne senkrechte Linie geführt werden; und durch einen und denselben Punct einer Geraden, kann man nur eine einzige auf dieser Geraden senkrechte Ebne legen.

Beweis.

Der erste Fall des Satzes ist an und für sich klar; denn wenn man vom Puncte C Fig. 100. auf der Ebne AB noch eine andre senkrechte als CD, z. B. CG errichten könnte, so würde diese Gerade auch auf GD senkrecht seyn, und das Dreyeck CGD würde zwey rechte Winkel haben, welches unmöglich ist (§. 52.).

Im zweyten Falle müßten, wenn man durch die zweyte senkrechte C′D Fig. 101. und durch die erste CD eine Ebne legte, die beyden Geraden CD und C′D zugleich auf der Geraden De, in welcher sie die Ebne AB schneidet, senkrecht seyn, welches ebenfalls unmöglich ist. Der Vortrag der Aufgabe ist also in beyden Theilen richtig.

In Betreff des dritten Falles, so würde, wenn man durch den Punct D senkrecht auf CD eine andre Ebne als AB führen könnte, deren Durchschnitt mit der Ebne G′DC, GD wäre, hieraus erfolgen, daß zwey mit CD in einerley Ebne liegende Gerade G′D und GD, auf einem und demselben Punct dieser Geraden senkrecht wären, welches ebenfalls unmöglich ist (§. 32.).

§. 199. Lehrsatz.

Die schiefen Linien, welche von der auf einer Ebne senkrechten Geraden gleich weit abstehen, sind einander gleich; die von ihr weiter entfernte ist die größte, und die senkrechte ist die kürzeste von allen Geraden, welche man von einem gegebenen Puncte nach einer Ebne ziehen kann.

Beweis.

Wenn CD Fig. 102. die senkrechte ist, so sind

1) alle im Umkreise eines aus dem Puncte D, als Mittelpunct beschriebenen Kreises EF, liegenden Puncte vom Punct C gleich weit entfert, weil die Dreyecke CDE, CDF, welche in D rechte Winkel, die Seite CD gemein, und die Seiten DE, DF gleich haben, einander gleich sind; mithin ist CE = CF.

2) Wenn man den außerhalb des Kreises liegenden Punct G mit dem Mittelpunct D verbindet, so wird die mit den Geraden CF und CD in einerley Ebne liegende Gerade GC länger als CF seyn (§. 27.).

3) Die Linie CD, welche offenbar kleiner als CF ist, muß nothwendigerweise kürzer als alle andre seyn, welche man vom Puncte C nach der Ebne AB ziehen kann.

§. 200. Anmerkung.

Da jeder Punct der Geraden CD von jedem Puncte des Umkreises EF gleiche Entfernung hat, so kann er eben so wie der Mittelpunct D zur Beschreibung dieses Kreises angewendet werden.

Durch dieses Mittel kann man von einem außerhalb einer Ebne genommenen Puncte auf dieselbe eine

senkrechte Linie fällen; man beschreibe zuvörderst aus dem Puncte C auf die Ebne AB einen Kreis, und suche dessen Mittelpunct D; verbindet man diesen mit dem Puncte C, so wird man die auf der Ebne AB senkrechte Gerade CD haben.

Da die senkrechte CD die kürzeste Linie ist, welche man vom Puncte C nach der Ebne AB ziehen kann, so biethet sie das natürlichste Maaß zur Bestimmung der Entfernung des Punctes C von dieser Ebne dar.

§. 201. Lehrsatz.

Wenn man von einem Puncte C einer gegen die Ebne AB schief fallenden Linie CG Fig. 130. auf diese Ebne die senkrechte CD fällt, nnd die Puncte G und D durch eine Gerade verbindet, so wird die in der Ebne AB auf GD senkrecht geführte EF auch auf CG senkrecht seyn.

Beweis.

Nachdem man GE = GF genommen, und in der Ebne AB die Geraden ED, FD gezogen hat, wird man haben ED = FD (§. 27.). Zieht man endlich die schiefen Linien CE und CF, so werden sie einander gleich seyn, weil sie von der senkrechten gleich weit abstehen (§. 199.); betrachtet man sie aber gegen CG in der Ebne ECF, so werden sie vom Puncte G der Geraden CD gleich weit entfernt seyn, welche folglich auf EF senkrecht seyn wird (§. 30.).

§. 202. Lehrsatz.

Wenn eine außerhalb einer Ebne AB liegende Ge-

rade DE Fig. 104., einer in dieser Ebne gezogenen Geraden AC parallel ist, so wird sie diese Ebne nicht schneiden, so weit man auch beyde verlängern mag, und diese Linie wird zugleich einer jeden in der Ebne AB der AC parallel geführten BF parallel seyn.

Beweis.

1) Da die Gerade DE mit der Geraden AC in einerley Ebne AD liegt, so kann sie die Ebne AB nur auf ihrem Durchschnitte mit der ersten, d. h. auf AC treffen; da aber DE nach der Annahme die AC nie schneiden kann, so wird sie auch die Ebne AB nicht treffen können.

2) Wenn man durch die Gerade DE und durch einen Punct B der zu AC in der Ebne AB parallel angenommenen Geraden BF die Ebne Df legt, so muß die Gerade Bf nothwendigerweise der DE parallel seyn, weil eben bewiesen worden, daß DE die Ebne AB nicht schneiden kann, in welcher Ebne auch Bf liegt; und nach dem Vorhergehenden wird die der DE parallele AC, welche die Ebne Df, in welcher diese letztere liegt, nicht schneiden kann, auch die Gerade Bf, die sich ebenfalls darin befindet, nicht schneiden können. Da sich die in einer und derselben Ebne AB liegenden Geraden AC und Bf nicht schneiden können, so müssen sie parallel seyn; und da man durch den Punct B nur eine einzige der AC parallele Linie führen kann (§. 40.), so folgt, daß Bf mit BF zusammen fallen, oder daß DE der BF parallel seyn wird, welches der zweyte Theil des Satzes ist.

§. 203. Zusatz.

Hieraus fließt offenbar, daß zwey Gerade DE und BF, welche einer und derselben dritten AC parallel sind, es auch zu einander seyn müssen; denn denkt man sich eine durch die Gerade BF und die Gerade AC gehende Ebene AB, so wird die Gerade DE den im Vortrage des obigen Satzes enthaltenen Bedingungen ein Genüge leisten.

§. 204. Lehrsatz.

Die Winkel BCD und EAF, welche ihre Schenkel parallel und ihre Oeffnungen nach einerley Seite gerichtet haben, sind einander gleich, wenn sie gleich in verschiedenen Ebnen liegen.

Beweis.

Wenn man durch die parallelen Seiten CD und AE, CB und AF zwey Ebnen AD und AB legt, dann $CD = AE$, $CB = AF$ nimmt, und die Linien DE, BF, DB, EF zieht, so werden die Figuren ACDE, ACBF Parallelogramme seyn (§. 85.); die Seiten ED und BF werden folglich der AC gleich, einander parallel seyn (vorherg. §.), und ein Parallelogramm bilden, in welchem man haben wird $DB = EF$. Da nun die Dreyecke DCB und AEF ihre Seiten Stückweise einander gleich haben, so müssen sie einander gleich seyn, und $BCD = EAF$ geben.

§. 205. Lehrsatz.

Wenn man in jeder der Ebnen AB und AD aus irgend einem Puncte H ihres gemeinschaftlichen Durch-

schnitts AC, die Geraden IH′ und HG respectiv auf diesem gemeinschaftlichen Durchschnitt senkrecht errichtet, und der Winkel IHG, den sie mit einander einschließen, dem Winkel ihg gleich ist, den zwey auf eine ähnliche Art in den Ebnen ab und cd auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt ac dieser beyden Ebnen geführten Linien einschließen, so ist die Neigung der Ebnen AB und AD der der Ebnen ab und ad gleich.

Beweis.

Trägt man die Ebne ab dergestalt auf AB, daß ac auf AC und der Punct h auf H zu liegen kommt, so muß die Gerade hg nothwendigerweise auf HG fallen, weil die Winkel ahg und AHG beyde rechte sind. Ferner bestimmen die auf AH senkrechten Geraden IH und HG eine auf dieser Geraden senkrechte Ebne GHI (§. 197.); die Geraden ih und hg bestimmen ebenfalls eine andre auf ah senkrechte Ebne ghi. Da aber ah mit AH zusammen fällt, so müssen auch die Ebnen GHI und ghi auf einander fallen, weil es sonst unmöglich wäre durch einen und denselben Punct H zwey auf einerley Geraden senkrechte Ebnen zu führen (§. 198.); und da die Winkel GHI und ghi der Annahme nach gleich sind, so muß hg mit HG, und auch ih mit IH zusammen fallen; hieraus folgt, daß auch die Ebnen ad und AD auf einander fallen müssen, weil die beyden in der ersten liegenden Geraden ah und ih mit den beyden in der zweyten liegenden AH und IH zusammen fallen (§. 193.). Die Neigung der beyden Ebnen AB und AD ist also der der Ebnen ab und ad gleich.

§. 206. Anmerkung.

Wir wollen von nun an mit dem Nahmen des **Flächenwinkels** die Neigung zweyer sich schneidenden Ebnen belegen, und wir werden diesen Winkel durch vier Buchstaben bezeichnen, von denen die mittlern den gemeinschaftlichen Durchschnitt der Ebnen oder die Gränze des Flächenwinkels angeben.

Die Neigung der Ebnen AB und AE Fig. 105., welche sich nach der Linie AG schneiden, wird der Flächenwinkel BGAE oder DHGC seyn.

Der Winkel CHD, welchen die auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt AG der Ebnen AB und AE senkrechten Geraden HD und HC bilden, ist das natürlichste Maaß ihrer Neigung, oder des Flächenwinkels, welchen sie mit einander bilden; denn läßt man die Ebne AC um den gemeinschaftlichen Durchschnitt der vorgelegten Ebnen AG herumbewegen, so wird offenbar die Gerade HC, welche mit HD zusammen fällt, wenn AC auf AB zu liegen kommt, bey dieser Bewegung eine auf AG senkrechte Ebne beschreiben (§. 197.), und auf HF in der Verlängerung von HD zu liegen kommen, wenn sich die Ebne AC auf AB befindet; so daß der Winkel CHD anfängt, zunimmt, und mit der Neigung der Ebnen begränzt ist. Vergleicht man ferner die Neigung der beyden Ebnen ab und ae mit der der beyden andern AB und AE, so wird sich finden, daß das Verhältniß dieser Neigungen, dem der Winkel chd und CHD gleich ist. Denn wenn diese Winkel einander commensurable sind, so werden, wenn man sie durch die Geraden hd′, HD′, HD″ in die beyden aliquote Theile zerlegt, dann

durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt ag und durch hd', die Ebne ad', durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt AG und durch HD', HD'' die Ebnen AD', AD'' legt, einerseits die Flächenwinkel dhgd', d'hgc, und andrerseits die Flächenwinkel DHGD', D'HGD'', D''HGC gebildet werden, welche alle einander gleich sind (§. 205.); und der Flächenwinkel dhgc wird sich zum Flächenwinkel DHGC verhalten, wie die Anzahl der im Winkel chd enthaltenen Theile sich zur Anzahl der in CHD enthaltenen Theile verhält.

Wenn die Flächenwinkel bgac und BGAC einander incommensurable seyn sollten, so würde ein dem im §. 109. völlig ähnliches Raisonnement beweisen, daß ihr Verhältniß weder größer noch kleiner als das der Winkel chd und CHD seyn kann. Wir schließen hieraus, daß der Flächenwinkel denjenigen ebnen Winkel zu seinem Maaße hat, welchen zwey in jeder dieser Ebnen, aus einem und demselben Puncte ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts, auf diesen Durchschnitt senkrecht geführte Gerade mit einander einschließen.

Es ist klar, daß die Flächenwinkel mit denselben Eigenschaften behaftet sind, als die sie messenden ebnen Winkel; daß z. B. die an der Gränze GH einander entgegengesetzten Winkel LGHI und BGHC einander gleich sind, weil sie von den ebnen Scheitelwinkeln CHD und IHF gemessen worden.

§. 207. Zusatz.

Eine durch die auf der Ebne AB senkrechte Linie FG Fig. 106. gelegte Ebne CD neigt sich von keiner Seite

der erstern, und ist folglich auf ihr senkrecht; denn wenn man in der Ebne AB senkrecht auf CE die Gerade FK errichtet, und sie in K′ verlängert, so werden die Winkel GFK und GFK′ rechte seyn (§. 195.), und nach dem vorhergehenden §. werden die von der Ebne CD auf beyden Theilen AE und CB der Ebne AB gebildeten Flächenwinkel BECD und AECD als rechte einander gleich seyn.

Es ist offenbar, daß man durch die in der Ebne AB genommene Gerade CE, nur eine einzige CD, auf dieser Ebne senkrechte Ebne errichten kann.

§. 208. Lehrsatz.

Wenn man von irgend einem Puncte des gemeinschaftlichen Durchschnitts CE zweyer unter einem rechten Winkel sich schneidenden Ebnen AB, CD, eine auf der ersten Ebne senkrechte Linie errichtet, so wird diese gänzlich in der zweyten liegen.

Beweis.

Wenn dies nicht der Fall wäre, so könnte man durch diese Linie und durch die Linie CE eine zweyte auf AB senkrechte Ebne legen, welches unmöglich ist (vorherg. §.).

Die Gerade FG ist überdieß auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt senkrecht (§. 195.).

§. 209. Zusatz.

Hieraus folgt, daß der Durchschnitt GH Fig. 107. zweyer auf einer und derselben Ebne AB senkrechten Ebnen CD und EF, ebenfalls auf der ersten senkrecht

ist; denn da sich die aus dem Puncte E auf der Ebne errichtete senkrechte, nach dem vorhergehenden §., sowohl in der Ebne CD als in der Ebne EF befinden muß, so kann sie nur ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt GH seyn.

§. 210. Lehrsatz.

Die auf dem Durchschnitt CE zweyer auf einander senkrechten Ebnen CD und AB, in der ersten errichteten senkrechte Linie FG, ist auch auf der zweyten Ebne senkrecht.

Beweis.

Wenn man in der Ebne AB durch den Punct F die Gerade FK senkrecht auf CE zieht, so muß der Winkel GFK nothwendigerweise ein rechter seyn, weil nach der Annahme die Ebne CD auf AB senkrecht ist (§. 207.). Da nun die Linie GF zu gleicher Zeit auf den beyden in der Ebne AB geführten Geraden CE und FK senkrecht ist, so ist sie auch auf dieser Ebne senkrecht (§. 195.).

§. 211. Lehrsatz.

Zwei gerade Linien, FG und HI, welche auf einer und derselben Ebne senkrecht stehen, sind einander parallel; und umgekehrt, wenn die Gerade FG auf der Ebne AB senkrecht, und HI der FG parallel ist, so muß auch HI auf der Ebne AB senkrecht seyn.

Beweis.

Wenn man die Puncte F und H durch die Gerade CE verbindet, und durch die Linie FG die Ebne CD legt, welche auf AB senkrecht seyn wird, so wird sie die

Gerade HI enthalten, weil sie ebenfalls auf AB senkrecht ist (§. 208.); und da sich dann diese letztere mit FG in einerley Ebne und auf einer und derselben Geraden CE senkrecht befindet, so muß sie der FG parallel seyn (§. 39.).

Umgekehrt wird, wenn FG und HI parallel sind, die Ebne CD, welche sie enthält, auf AB senkrecht seyn, wenn eine derselben, etwa FG, auf dieser letztern senkrecht ist; und da wegen des Parallelismus die andre Gerade HI eben so wie FG und CE senkrecht seyn muß, so wird sie nach dem vorhergehenden §. auch auf der Ebne AB senkrecht seyn.

§. 212. Lehrsatz.

Zwey Ebnen, welche auf einer und derselben Geraden GH Fig. 108. senkrecht sind, können einander nicht schneiden.

Beweis.

Wenn sie einander schnitten, und man zieht von einem Punct ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts, der EF seyn mag, nach den Puncten G und H, worin die Gerade GH dieselbe schneidet, die von einem und demselben Punct ausgehenden Geraden HE und GF, so werden diese mit GH ein Dreyeck bilden, und werden mit dieser letztern nothwendigerweise in einerley Ebne liegen, und da sie dieselbe unter rechten Winkeln schneiden müssen (§. 195.), so würde folgen, daß man von einem und demselben Punct in einerley Ebne, auf eine Gerade zwey senkrechte Linien fällen kann, welches unmöglich ist (§. 32.).

§. 213.

Da zwey auf einer und derselben Ebne senkrechte Ebnen einander nicht schneiden, so sind sie parallel.

§. 214. Lehrsatz.

Wenn zwey parallele Ebnen AB und CD Fig. 109. von einer dritten FH geschnitten werden, so sind auch ihre Durchschnitte EF und GH parallel.

Beweis.

Es ist offenbar, daß die in einerley Ebne FH liegenden EF und GH, so weit man sie auch verlängern mag, einander nicht schneiden können, ohne daß die Ebnen AB und CD, in denen sie respectiv liegen, einander schneiden, welches aber nicht geschehen kann, weil sie der Annahme nach parallel sind.

§. 215. Zusatz.

Hieraus folgt 1) daß zwey parallele Ebnen ihre senkrechte gemein haben.

2) Daß diese senkrechten gleich sind, woraus folgt, daß parallele Ebnen in allen ihren Puncten gleiche Entfernung von einander haben.

Denn wenn man auf die Ebne Fig. 108 * die senkrechte GH errichtet, und durch ihren untersten Punct die Geraden GL und GI zieht, so werden die Ebnen AB und CD von den Ebnen LGH und IGH nach den Geraden HM und HK geschnitten werden, welche den Geraden GL und GI parallel sind, und folglich, so wie diese letztern, auf GH senkrecht seyn; es ist also (§. 195.) GH sowohl auf der Ebne CD als auf der Ebne AB senkrecht.

Im zweyten Falle wird, wenn man auf der Ebne AB die senkrechte RS errichtet, und sich die Ebne GRS denkt, die Figur GHSR ein Rechteck seyn (§. 214.), und GH = GS geben.

§. 216. Lehrsatz.

Wenn zwey sich schneidende Gerade zweyen andern sich schneidenden Geraden parallel sind, so wird die von den beyden ersten begränzte Ebne der von den beyden andern begränzten parallel seyn.

Beweis.

Wenn die Geraden HM und HK den Geraden AP und AN parallel sind, und man fällt vom Puncte H auf die Ebne AB die Gerade GH senkrecht, so wird sie auf jeder der Geraden GL und GI senkrecht seyn, welche in dieser Ebne den Geraden AP und AN parallel geführt sind, und welche auch den Geraden HM und HK parallel sind (§. 203.); die Linie GH wird also auch auf diesen letztern, und folglich auf der Ebne, welche sie bestimmen, senkrecht seyn (§. 195.); da nun alsdann die Ebnen AB und CD auf einer und derselben Geraden GH senkrecht sind, so werden sie parallel seyn (§. 213.).

§. 217. Zusatz.

Hieraus folgt, daß man durch zwey gerade Linien, HQ und GI Fig. 108 **, welche weder einander schneiden noch parallel sind, und daher nicht in einer einzigen Ebne liegen können, immer zwey einander parallele Ebnen legen kann, deren kürzeste Entfernung, die der vorgelegten Geraden geben wird.

Denn wenn man durch irgend einen Punct T der geraden HQ eine Line TD der GI parallel führt, und durch einen Punct R der Geraden GI eine Linie RO der HQ parallel führt, so werden die Geraden HQ und TD, welche respectiv den Geraden RO und GI parallel sind, eine Ebne begränzen, die der durch diese letztern gehenden parallel seyn wird.

Es ist klar, daß die Geraden HQ und GI einander nicht näher als diese Ebnen kommen können.

§. 218. Anmerkung.

Wenn man von einem Puncte R der Geraden GI auf die Ebne CD eine senkrechte RS errichtet, so wird die durch RS und GI gehende Ebne GS zu gleicher Zeit auf CD und AB senkrecht seyn (§. 215.); sie wird ferner die erste nach einer Geraden zur GI parallelen HK schneiden (§. 214.), welche letztere die Gerade HQ im Puncte H schneiden wird, in welchem diese der GI am nächsten liegt; denn wenn man vom Puncte H auf GI die senkrechte HG fällt, so wird sie auf der Ebne AB senkrecht seyn (§. 210.) und folglich auch auf CD; sie wird also den kürzesten Abstand der Ebnen und der Geraden messen.

Es ist wohl zu merken, daß sie zugleich auf beyden vorgelegten Geraden HQ und GI senkrecht ist (§. 195.).

§. 219. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien GH und IK, welche zwischen zweyen parallelen Ebnen AB und EF Fig. 110. liegen, werden von einer diesen Ebnen parallelen Ebne CD in proportionale Theile geschnitten.

Beweis.

Um dieses einzusehen, verbinde man zuvörderst die Puncte H und I durch eine Gerade HI; ferner ziehe man in der Ebne CD durch die Puncte L, M, N, worin sie die Geraden GH, HI, IK schneiden, die Geraden LM und MN, welche man als die Durchschnitte der Ebne CD mit den Ebnen der Dreyecke GHI, HIK ansehen kann, und welche folglich den Geraden GI und HK, in welchen GHI die Ebne AB, und HIK die EF trifft, parallel seyn werden (§. 214.). Da nun die Seiten GH und Hl des Dreyecks GHI von der der GI parallelen Linie LM geschnitten werden, so wird man haben

$$HL : LG = HM : MI, \quad HL : HG = HM : HI;$$

da MN der HK parallel ist, so giebt das Dreyeck HIK

$$HM : MI = KN : NI, \quad HM : HI = KN : KI,$$

woraus man schließt

$$HL : LG = KN : NI, \quad HL : HG = KN : KI,$$

welches mit dem Vortrage des Satzes übereinstimmt.

§. 220.

Wenn von mehreren verschiedeneu Ebnen ASB, BSC, CSD, DSE, ESF, FSG, GSA, Fig. 111., welche alle durch einerley Punct S gehen, je zwey und zwey einander schneiden, so wird der zwischen ihnen liegende, auf der entgegengesetzten Seite des Punctes S unbegränzte Raum, eine körperliche Ecke genannt. Insbesondre aber wird eine körperliche Ecke von dreyen Seitenflächen ein körperliches Dreyeck genannt. Eine jede Ecke von mehr Seitenflächen wird nach der Anzahl derselben benennt.

Der Punct S, worin sich alle Flächen der Ecke durchschneiden heißt der Scheitel derselben; ihre auf einander folgenden Durchschnitte SA, SB, SC, SD, SE ꝛc. sind die Gränzen der Ecke. Die Theile, welche ein dergleichen körperliches Dreyeck SABCDEFG zusammen setzen, und es von jedem andern aus einer gleichen Anzahl Seitenflächen zusammen gesetzten unterscheiden, sind die ebnen Winkel ASB, BSC, CSD ꝛc., welche von den auf einander folgenden Gränzen gebildet werden, und die respectiven Neigungen dieser Flächen, oder die von denselben gebildeten Flächenwinkel.

In einem körperlichen Dreyecke hat man also sechs Stücke in Erwägung zu ziehen, nehmlich: drey Ebnen und drey Flächenwinkel.

§. 221. Lehrsatz.

Die Summe irgend zweyer der ebnen Winkel, welche ein körperliches Dreyeck zusammen setzen, ist immer größer als der dritte.

Beweis.

Wenn die ebnen Winkel ASB, ASC, BSD, Fig. 112. alle einander gleich sind, so ist der Satz für sich klar. Ist dieses nicht der Fall, so sey ASB der größte von allen Dreyen, in welchem man die Gerade SD dergestalt führt, daß ASD dem ASC gleich wird; wir wollen nur $SD = SC$ nehmen, und die Geraden ADB, AC, BC ziehen. Die beyden Dreyecke ASC und ASD sind einander gleich, weil die nach der Construction gleichen Winkel zwischen respectiv gleichen Seiten liegen; man hat also $AC = AD$; aber $AC + BC > AB$ (§. 15.),

oder

oder AC + BC > AD + BD; zieht man beyderseits die einander gleichen Linien AC und AD ab, so wird man haben BC > BD. Da nun die Dreyecke BSC und BSD die Seiten SC und SD einander gleich, und die Seite SB gemein haben, so wird der der Seite BC, die größer als BD ist, gegenüber stehende Winkel BSC, nothwendigerweise den dieser letztern gegenüber stehenden Winkel BSD übertreffen (§. 19.); woraus offenbar folgt ASC + BSC = ASD + BSC größer ist als ASD + BSD oder als ASB.

§. 222. Lehrsatz.

Wenn die beyden körperlichen Dreyecke SABC, S'A'B'C' Fig. 113. aus dreyen ebnen Winkeln zusammen gesetzt sind, deren jeder in dem einen im andern gleich ist, so sind auch die in beyden zwischen gleichen ebnen Winkeln liegenden Flächenwinkel einander gleich; das heißt, die ähnlichen Seitenflächen werden in jedem der vorgelegten körperlichen Dreyecke, eine gleiche Neigung zu einander haben *).

Beweis.

Es sey ASB = A'S'B', ASC = A'S'C', BSC = B'S'C'; wenn man auf den Gränzen BS und B'S', durch welche gleiche ebne Winkel verbunden werden, BS = B'S' nimmt, und durch die Puncte B und B' auf

*) Dieser und der folgende Satz sind aus der von Robert Simson gelieferten Ausgabe des Euclids gezogen, welcher sie zuerst bewiesen hat, um eine Lücke auszufüllen, welche das eilfte Buch der Elemente des Euclides zurück lassen würde.

diese Gränzen die Ebnen ABC und A′B′C′ senkrecht errichtet denkt, so werden die Dreyecke BSC, ASB, welche in B rechtwinklicht, so wie es die Dreyecke B′S C′, A′S′B′ in B′ sind, diesem letztern gleichen, wegen der Gleichheit der Seiten BS und B′S′ und der der Winkel BSC und B′S′C′, ASB und A′S′B′ (§. 18.); man wird also haben

$SC = S'C'$, $SA = S'A'$, $BC = B'C'$, $AB = A'B'$.

Da aber $ASC = A'S'C'$, so werden die Dreyecke ASC und A′S′C′ einander gleich seyn (§. 16.), und folglich $AC = A'C'$ geben. Da endlich die drey Seiten der Dreyecke ABC und A′B′C′ stückweise gleich sind, so werden die Winkel ABC und A′B′C′, welche die von den Ebnen BSC und ASB, B′S′C′ und A′S′B′ eingeschlossenen Flächenwinkel messen (§. 205.) einander gleich seyn, wie es der Vortrag der Aufgabe angiebt.

§. 223. Lehrsatz.

Zwey körperliche Dreyecke SABC und S″A″B″C″, welche von dreyen gleichen und ähnlich liegenden ebnen Winkeln gebildet werden, sind in allen ihren Theilen einander gleich.

Beweis.

Nachdem man die gleichen Seitenflächen ASB und A″S″B″ dergestalt auf einander gelegt hat, daß die Gränzen AS und A″S″ auf einander liegen, so werden die Seitenflächen ASC und A″S″C″, welche gegen die ersten gleiche Neigung haben (vorherg. §.), ebenfalls auf einander fallen; und wegen der Gleichheit der ebnen Winkel ASB, A″S″B″, ASC und A″S″C″ müssen auch

die Gränzen SB und S''B'', SC und S''C'', und folglich auch die von diesen Gränzen bestimmten Ebnen BSC und B''S''C'' aufeinander fallen.

§. 224. Anmerkung.

Es ist wohl zu merken, daß das Zusammenfallen der körperlichen Dreyecke nur dann statt finden kann, wenn die einander gleichen Seitenflächen in beyden auf eine ähnliche Art liegen, das heißt, wenn beyde auf gleiche Seitenflächen gelegt sind, und ihre Oeffnung nach einerley Richtung haben, auch die Oeffnungen der gleichen Flächenwinkel einerley Richtung haben, wie dies bey den Ecken SABC und S''A''B''C'', aber nicht bey den Ecken SABC und S'A'B'C' der Fall ist. Bey dieser letztern hat der zwischen den ebnen Winkeln A'S'B', B'S'C' liegende Flächenwinkel C'B'S'A' eine entgegengesetzte Richtung als die Oeffnung des Flächenwinkels CBSA, welcher ihm gleich ist, weil er zwischen den ebnen Winkeln ASB, BSC liegt, welche respectiv der vorigen gleich sind; und man sieht wohl, daß es unmöglich ist, diese beyden Ecken völlig aufeinander zu legen.

Die Gleichheit der Dreyecke ABC und A'B'C', auf welcher die der von gleichen ebnen Winkeln geblideten Flächenwinkel beruht, muß immer bestehen, weil man, wenn man sich dieselben vom körperlichen Dreyecke abgesondert denkt, die Ebne des zweyten umdrehen kann, bis sie auf die des ersten zu liegen kommt, eine Umkehrung, welche bey den Ecken von mehrern Seiten nicht statt findet. Man kann also die Gleichheit der Ecken SABC und S'A'B'C' nur aus der der sie zusammen setzen-

den Theile herleiten, und weil keine Ursache vorhanden ist, daß sie von einander verschieden seyn sollen, indem sie aus einerley Ebnen und einerley Flächenwinkel zusammen gesetzt sind.

Da ihre Verschiedenheit lediglich aus dem Auftragen ihrer Theile, das heißt daraus erfolgt, daß die Ordnung der ebnen Winkel in dem einen ASB, ASC, CSB, hingegen die im andern A′S′B′, C′S′B′, A′S′B′ ist, so glaube ich, daß man sie entgegen gesetzt liegende körperliche Dreyecke nennen kann, und man kann folglich sagen, daß zwey einander entgegen gesetzt liegende körperliche Dreyecke in Ansehung des Raums, den sie zwischen sich fassen, gleich sind *).

Es giebt noch verschiedene Fälle der Gleichheit der körperlichen Dreyecke zu untersuchen; wir wollen uns

---

*) Legendre, welchem wir die Bemerkung und Beleuchtung der Schwierigkeit verdanken, welche die Gleichheit der entgegen gesetzt liegenden körperlichen Dreyecke darbietet, nennt sie symetrische, weil es sie als auf verschiedenen Seiten einer und derselben Ebne construirt betrachtet. In der That werden, wenn man das körperliche Dreyeck S′A′B′C′ herumdreht, um es unterhalb S″A″B″C″ in S‴A‴B‴C‴, indem man nehmlich den ebnen Winkel A′S′B′, und den ihm gleichen A″S″B″ um die correspondirenden Gränzen A′S′ und A″S″, B′S′ und B″S″ herum drehen zu lassen, die beyden körperlichen Dreyecke von jeder Seite der Ebne A″S″B″ symetrische Räume darstellen. Legendre hat dieser sinnreichen Idee eine Ausdehnung gegeben, welche ein größeres Licht über die Theorie der Polynder (oder von ebnen Flächen begränzte Körper) verbreitet; wir verweisen indessen den Leser auf sein eignes Werk.

indessen auf den des vorhergehenden §. einschränken, welcher für unsern Gegenstand hinreichend ist.

§. 225. Lehrsatz.

Die Summe der ebnen Winkel, welche eine convexe körperliche Ecke bilden, das heißt, welche lauter auswärts gehende Winkel hat, die aber übrigens wie immer beschaffen seyn mag, ist stets kleiner als vier rechte.

Beweis.

Wenn man die vorgelegte Ecke SABCDE Fig. 14. durch irgend eine Ebne durchschneidet, so werden die Seiten des von den Durchschnitten dieser Ebne mit den Seitenflächen der vorgelegten Ecke gebildeten Polygons ABCDE diese Seitenflächen in eine eben so große Anzahl Dreyecke verwandeln. Betrachtet man ins Besondre das körperliche Dreyeck BACS, so hat man

$$SBA + SBC > ABC \text{ (§. 221.)},$$

desgleichen giebt das körperliche Dreyeck CBDS

$$SCB + SCD > BCD$$

und so fort; die Summe der auf den Seiten AB, BC ꝛc. gebildeten Winkel SAB, SBA, SBC, SCB ꝛc. der Dreyecke ASB, BSC ꝛc. wird also die der innern Winkel des Polygons übertreffen, und mithin mehr als so viel Mahl zwey Rechte betragen, als dieses Polygon Seiten hat, weniger zwey, oder als die Ecke Seitenflächen hat, weniger zwey (§. 80.). Zieht man diese nun von der Summe aller Winkel der Dreyecke SAB, SBC, SCD ꝛc., welche so viel Mahl zwey Rechte beträgt als die Ecke Seitenflächen hat, so muß nothwendigerweise für die Summe der am Scheitel S der vorgelegten Ecke

SABCDE gebildeten ebnen Winkel ASB, BSC ꝛc. weniger als zwey Mahl zwey Rechte oder als vier Rechte bleiben.

Von den durch Ebnen begränzten Körpern.

§. 226.

Die von ebnen Flächen begränzten Körper heißen vieleckigte Körper, Polynder.

Um einen Raum von allen Seiten einzuschließen, sind wenigstens vier Ebnen erforderlich. Der von den vier Ebnen ASB, ASC, BSC, ABC Fig. 115. eingeschlossene Körper SABC wird ein Tantrandrum genannt.

Jeder Körper, in welchem eine der Flächen, ein Polygon, alle andre aber Dreyecke sind, die in einem einzigen Punct zusammen laufen, heißt eine Pyramide. Der Körper SABCDE Fig. 116. ist eine fünfeckigte Pyramide, weil die Basis ABCDE ein Fünfeck, und der Punct S, als der gemeinschaftliche Scheitel der Dreyecke ASB, BSC, CSD, DSE, ESA, auch zugleich der Scheitel der Pyramide ist. Auch das Tantrandrum SABC der Figur 115 ist eine dreyeckige Pyramide.

§. 227.

Man belegt ferner unter den vieleckigen Körpern mit dem Nahmen der Prismen diejenigen, welche zwey einander gegenüber stehende gleiche und parallele Flächen haben, und in denen alle übrige Parallelogramme sind; der Körper ABCDEFGHIK Figur 117. ist ein

Prisma. Die Fläche ABCDE, welche wir von nun an die Basis nennen werden, ist ein Fünfeck, oder überhaupt ein Vieleck; durch den Scheitel seiner Winkel, und außerhalb der Ebne hat man die Geraden AF, BG &c. zu einander parallel geführt, und durch eine zur Ebne ABCDE parallele Ebne FGHIK begränzt. Je zwey und zwey der Gränzen AF, BG, CH &c. zusammen genommen, bestimmen die Ebnen AFGB, BGHC, welche Parallelogramme sind, weil die Geraden AB und FG, BC und GH je zwey und zwey parallel sind (§. 214.).

Es ist offenbar, daß das Polygon FGHIK, welches die obere Basis des Prisma bildet, dem Polygon ABCDE gleich ist, welches die untere Basis bildet, weil sie alle ihre Seiten und Winkel stückweise gleich haben (§. 204.). Aus eben der Ursache ist auch jeder im Prisma durch eine zur Basis parallele Ebne gemachter Schnitt dieser Basis gleich.

Es ist noch zu merken, daß jede körperliche Ecke eines Prisma nur aus dreyen ebnen Winkeln zusammen gesetzt ist.

§. 228. Lehrsatz.

Wenn die körperlichen Dreyecke der Tantrandra SABC, S′A′B′C′ Fig. 115. aus gleichen und ähnlich liegenden Dreyecken zusammen gesetzt sind, so sind diese Tantrandra gleich; und so werden sie es auch dann seyn, wenn die Flächen SAB und SAC des einen, den Flächen S′A′B′ und S′A′C′ des andern gleich, auf eine ähnliche Art aneinander gelegt sind, und mit einander denselben Flächenwinkel als diese bilden.

Beweis.

1) Es ist klar, daß wenn man die Fläche SAB auf die Fläche S′A′B′ legt, die einander gleichen Flächen, welche gegen diese einerley Neigung haben (§. 222.), auf einander fallen werden.

2) Da die Fläche SAB mit S′A′B′ zusammen fällt, so wird auch die Fläche SAC mit S′A′C′ zusammen fallen, wenn der Flächenwinkel CSAB dem C′S′A′B′ gleich ist; und da sich dann die Geraden SB und SC auf S′B′ und S′C′ befinden, so müssen auch die Flächeu SBC und S′B′C′ nothwendigerweise auf einander fallen.

§. 229. Lehrsatz.

Wenn die körperlichen Dreyecke B und B′ der Prismen AI und A′I′ Fig. 117. aus gleichen und ähnlich liegenden Polygonen zusammen gesetzt sind, so werden diese Prismen einander gleich seyn.

Beweis.

Es ist klar, daß wenn das Zusammenfallen der körperlichen Dreyecke B und B′ bewirkt ist (§. 223.), wodurch die Flächen ABCDE und A′B′C′D′E′, BCHG und B′C′H′G′ auf einander fallen, auch die Geraden CD und C′D′, CH und C′H′ wegen der Gleichheit dieser Flächen, auf einander fallen müssen. Da aber die Linien CD und CH die Fläche CDIH, und die Linien C′D′ und C′H′ die correspondirende Fläche C′D′I′H′ begränzen, so folgt, daß auch diese Flächen auf einander fallen werden. Man kann eben so beweisen, daß alle andre Parallelogramme des Prisma AI mit denen des

Prisma A′I′ zusammenfallen müssen, woraus folgt, daß auch die Polygone FGHIK und F′G′H′I′K′ auf einander fallen müssen, weil die Seiten des ersten von denen des andern gedeckt werden.

§. 230. Anmerkung.

Man kann immer mit dem Scheitel der Ecke irgend eines Polyndrums dreyeckigte Pyramiden bilden, wenn man durch einen dieser Puncte Ebnen legt, welche durch die Gränzen des vorgelegten Polyndrums, oder durch die in seinen Flächen gezogenen Diagonalen geht. Der Anblick der Fig. 119. zeigt dies deutlich. Das Polyndrum ABCDEFG findet sich in den fünf Pyramiden

GABC, GABF, GAEF, GAEC, GEDC

zerlegt, deren Scheitel im Puncte G ist, und welche entstehen, wenn man zuvörderst diesen Punct mit den Scheiteln A, B, C, D, E der andern Ecken verbindet, wodurch die Pyramiden GABCDE, GABF, GAEF entstehen, welche zur Basis die verschiedenen Flächen haben, die keinen Theil der Ecke G ausmachen; und theilt man ferner diejenige dieser Flächen, welche mehr als drey Seiten hat, in Dreyecke, so hat man die Grundflächen der im Vorhergehenden angegebenen dreyeckigen Pyramiden.

Wir wollen uns nicht dabey aufhalten zu beweisen, daß zwey Körper, welche aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Pyramiden zusammen gesetzt sind, einander gleich seyn müssen.

§. 231.

Das Prisma ABCDEFGH, Fig. 118., dessen Ba-

ſis ABCD ein Parallelogramm iſt, wird ein Parallelepipedum genannt; ſeine gegenüber ſtehende Flächen, z. B. ABFE, CDHG, ſind gleich und parallel. Ihre Gleichheit iſt aus der Conſtruction des Prisma (§. 227.) offenbar, und ihr Parallelismus erfolgt aus dem der Schenkel der Winkel EAB, HDC, welche einander gleich ſind (§. 216.).

§. 232. Lehrſatz.

Ein zwiſchen ſechs Seitenflächen, von denen je zwey und zwey parallel ſind, eingeſchloſſener Körper, iſt ein Parallelepipedum.

Beweis.

1) Da die Ebne ABFE die beyden parallelen Ebnen ABCD und EFGH nach den einander parallelen Geraden AB und EF (§. 214.), und die parallelen Ebnen ADHE und BCGF nach den parallelen Geraden AE und BF ſchneidet, ſo muß die Figur ABFE nothwendigerweiſe ein Parallelogramm ſeyn. Man kann auf eben die Art beweiſen, daß jede andre Fläche des Polyndrums ein Parallelogramm iſt. 2) Da die Seiten AB und DC im Parallelogramm ABCD einander gegenüber ſtehen, ſo müſſen ſie gleich ſeyn; die Seiten HD und AE, CG und EF ſind es ebenfalls als gegenüber ſtehende Seiten in den Parallelogrammen ADHE, BCGF; endlich ſind auch die Winkel CDH und BAE, DCG und ABF einander gleich, weil ihre Seiten parallel, und ihre Oeffnungen nach einerley Seite gerichtet ſind (§. 204.); da alſo die gegenüber ſtehenden Parallelogramme ABFE und CDHG drey Seiten und die von ihnen eingeſchloſſe-

nen Winkel stückweise gleich haben, so müssen sie gleich seyn (§. 83.).

§. 233.

Aehnliche Körper heißen diejenigen, deren Seitenflächen ähnliche Vielecke, und deren Ebnen in gleicher Anzahl ähnlich liegend sind, und gleiche Neigung gegen einander haben, oder gleiche Flächenwinkel bilden.

§. 234. Lehrsatz.

Wenn die Seitenflächen, welche zwey homologe körperliche Dreyecke zweyer Tantrandra bilden, einander ähnlich und ähnlich liegend sind, so sind diese Tantrandra einander ähnlich; und sie sind es auch dann, wenn zwey Flächen des einen denselben Winkel einschließen als zwey Flächen des andern, welche überdies den vorigen ähnlich sind, und durch homologe Seiten gehen.

Beweis.

1) Wenn die Dreyecke SAB, SAC, SBC Fig. 115. respectiv den Dreyecken S′DE, S′DF, S′EF ähnlich und ähnlich liegend sind, so wird, wenn man auf der im Tantrandrum S′DEF der SA im Tantrandrum SABC homologen Seite $S'A' = SA$ nimmt, und durch den Punct A′ die Ebne ABC der DEF parallel legt, im Tantrandrum SDEF ein dem S′DEF ähnliches, und dem SABC gleiches Tantrandrum bestimmt werden.

Denn es ist klar, daß wegen des Parallelismus der Geraden A′B′ und DE, A′C′ und DF, B′C′ und EF (§. 214.), die Flächen S′A′B′ und S′DE, S′A′C′ und S′DF, S′B′C′ und S′EF, von denen je zwey und zwey

in einerley Ebne liegen, einander ähnlich seyn werden. Ferner sind die in verschiedenen Ebnen liegenden Dreyecke $A'B'C'$ und DEF, welche ihre Seiten parallel, und folglich ihre Winkel gleich haben (§. 204.), ebenfalls einander ähnlich. Da nun die beyden Tantrandra $S'A'B'C'$ und $S'DEF$ ihre Flächen ähnlich und ihre homologen körperlichen Dreyecke aus gleichen ebnen Winkeln zusammen gesetzt haben, so werden alle ihre körperliche Ecken gleich (§. 222.), und sie werden mithin ähnlich seyn.

Da nun die Dreyecke $S'A'B'$, $S'A'C'$ nach der Construction den $S'DE$ und $S'DF$, und folglich nach der Annahme diesen letztern gleichwinklicht sind, so müssen sie diesen letztern gleich seyn, weil die beyden homologen Seiten $S'A'$ und SA gleich sind (§. 18.); man wird also haben $S'B' = SB$, $S'C' = SC$, welches die Gleichheit der gleichwinklichten Dreyecke $S'B'C'$, SBC und folglich die der Tantrandra $S'A'B'C'$ und $SABC$ nach sich zieht (§. 228.). Es sind also endlich der Tantrandren $SABC$ und $S'DEF$, von denen das erste dem $S'A'B'C'$ gleich, und das andre ihm ähnlich ist, auch einander ähnlich.

2) Wenn die Dreyecke SAB und SAC den Dreyecken SDE und $S'DF$ ähnlich, ferner durch Seiten verbunden sind, welche denen, die diese letztern zusammen setzen, homolog sind, und überdies der Flächenwinkel $CSAB$ dem Flächenwinkel $FS'DE$ gleich ist, so wird das oben construirte Tantrandrum $S'A'B'C'$ dem $SABC$ gleich seyn (§. 228.), weil sie die beyden Flächen $S'A'B'$ und $S'A'C'$ den Flächen SAB und SAC gleich haben, und überdies mit einander denselben Flächenwinkel als

diese letztern einschließen; das Tantrandrum SABC wird also noch immer dem S′DEF ähnlich seyn.

§. 235. Lehrsatz.

Zwey Pyramiden sind einander ähnlich, wenn alle ihre Flächen einander ähnlich und ähnlich liegend sind.

Beweis.

Wenn die beyden Pyramiden SABCDE, SFGHIK Fig. 116. jede Fläche des einen einer Fläche des andern ähnlich haben, so hat man, um die Aehnlichkeit derselben zu beweisen, nur noch nöthig, die Gleichheit der Flächenwinkel darzuthun; da nun die ähnlichen Polygone ABCDE und FGHIK durch die von einem Winkel derselben nach allen andern gezogenen Diagonalen, in einerley Anzahl ähnlicher Dreyecke zerlegt werden können, so wird das Dreyeck ABC dem Dreyecke FGH ähnlich seyn; die körperlichen Ecken B und G sind also aus gleichen ebnen Winkeln gebildet, und ihre Flächenwinkel sind also einander gleich (§. 222.). Man kann auf eben die Gleichheit der an den körperlichen Ecken C und H, D und I ꝛc. liegenden Flächenwinkel darthun.

§. 236. Erster Zusatz.

Denkt man sich die Pyramide S′FGHIK durch eine der Ebne FGHIK parallele Ebne A′B′C′D′E′ geschnitten, so würde man eine Pyramide S′A′B′C′D′E′ erhalten, welche der ganzen Pyramide ähnlich ist; denn es ist leicht einzusehen, daß alle Flächen der einen denen der andern ähnlich und ähnlich liegend seyn werden, weil die Dreyecke A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′ den Dreyecken FGH, FHI,

FIK respectiv ähnlich sind, woraus folgt, daß auch die Grundflächen A′B′C′D′E′ und FGHIK einander ähnlich seyn werden.

Es ist offenbar, daß die Pyramiden S′A′B′C′D′E′ und SABCDE einander gleich seyn werden, wenn eine der Gränzen S′A′ der ersten der ihr correspondirenden SA der zweyten gleich ist; denn da die Seitenflächen beyder denen der Pyramide S′FGHIK ähnlich sind, so werden sie auch einander ähnlich seyn, und müssen folglich einander gleich werden, wenn sie eine Seite gemein haben, weil vermöge §. 18. gleichwinklichte Dreyecke einander gleich sind, wenn eine Seite des einen einer des andern gleich ist. Ferner werden die körperlichen Dreyecke dieser Pyramiden, welche aus gleichen ebnen Winkeln gebildet sind, auch ihre Flächenwinkel gleich haben (§. 222.). Wenn also die Grundflächen A′B′C′D′E′ und ABCDE zusammen fallen, so müssen es auch die Pyramiden S′A′B′C′D′E′ und SABCDE.

Legt man durch die Scheitel S und S′ und durch die Diagonalen AC, AD, FH und FI Ebnen, so kann man ferner mit geringer Aufmerksamkeit beweisen, daß die Pyramiden SABCDE, S′A′B′C′D′E′ und S′FGHIK aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Tantrandra zusammengesetzt, und daß es die Pyramiden S′A′B′C′D′E′ und SABCDE aus gleichen Tantrandren sind; woraus ferner folgt, daß diese letztern gleich sind (§. 230.).

Es ist wohl zu merken, daß die Gleichheit dieser Pyramiden, die der senkrechten SP und S′P′ mit sich

führt, welche von den Scheiteln S und S′ auf die respectiven Grundflächen herab gelassen werden.

§. 237. Zweyter Zusatz.

Aus der Aehnlichkeit der Seitenflächen der Pyramiden SABCDE, SFGHIK folgt, daß die Gränzen dieser Pyramiden einander und den von den Scheiteln derselben auf ihre Grundflächen gefällten senkrechten SP und S′Q proportional sind; denn wenn man die homologen dreyeckigen Seitenflächen SAB und S′FG, SBC und S′GH ꝛc. mit einander vergleicht, so erhält man diese Reihe gleicher Verhältnisse

$$SA : S'F = AB : FG = SB : S'G$$
$$SB : S'G = BC : GH = SC : S'H,$$

aus welchen man folgende zieht

$$SA : S'F = SB : S'G = SC : S'H \text{ ꝛc.}$$
$$= AB : FG = BC : GH \text{ ꝛc.}$$

Ferner giebt der Parallelismus der Ebnen A′B′C′D′E′ und FGHIK (§. 219.)

$$S'A' : S'F = S'P' : S'Q$$

oder

$$SA : S'F = SP : S'Q'$$

weil $S'A' = SA$, $S'P' = SP$; und das Verhältniß $SA : S'F$ verbindet diese letztere Proportion mit den vorhergehenden.

§. 238. Anmerkung.

Vermittelst des Vorhergehenden kann man die Höhe einer Pyramide finden, wenn man die Dimensionen des untern Streifens wie FGHIK, A′B′C′D′E′ kennt, welcher übrig bleibt, wenn man den obern Theil S′A′B′C′D′E′ vermittelst einer zur Grundfläche FGHIK parallelen Ebne

$A'B'C'D'E'$ abschneidet. Man braucht in dieser Absicht nur die Proportion

$$A'B' : FG = S'P' : S'Q$$

zu betrachten, aus welcher man herleitet

$$FG - A'B' : FG = S'Q - S'P' : S'Q,$$

oder

$$FG - A'B' : FG = P'Q : S'Q;$$

die drey ersten Glieder der letzten Proportion sind durch den Abschnitt selbst gegeben, von welchen $P'Q$ die Höhe ist, und sie geben die Höhe $S'Q$ der ganzen Pyramide zu erkennen.

§. 239. Lehrsatz.

Die Grundflächen der ähnlichen Pyramiden $S'A'B'C'D'E'$ und $S'FGHIK$ verhalten sich gegen einander wie die Quadrate irgend zweyer ähnlich liegenden Gränzen $S'A'$, $S'F$, und wie die Quadrate der von ihren Scheiteln auf ihre Grundfläche gefällten senkrechten $S'P'$ und $S'Q$.

Beweis.

Da die Grundflächen ähnlich sind, so hat man zuvörderst

$$A'B'C'D'E' : FGHIK = \overline{A'B'}^2 : \overline{FG}^2 \text{ (§. 176.)};$$

aber nach §. 237. ist

$$S'A' : S'F = A'B' : FG,$$

und daher

$$\overline{S'A'}^2 : \overline{S'F}^2 = \overline{A'B'}^2 : \overline{FG}^2;$$

es muß also seyn

$$A'B'C'D'E' : FGHIK = \overline{S'A'}^2 : \overline{S'F}^2,$$

welches der erste Theil des Satzes ist.

Was

Was den zweyten betrift, so wird er bewiesen, wenn man in Erwägung zieht, daß

$$S'A' : S'F = S'P' : S'Q,$$

woraus man schließt

$$\overline{S'A'^2} : \overline{S'F^2} = \overline{S'P'^2} : \overline{S'Q^2}$$

und

$$A'B'C'D'E' : FGHIK = \overline{S'P'^2} : \overline{S'Q^2}.$$

Es ist offenbar, daß man in die im Vorhergehenden erhaltenen Proportionen statt der Pyramide S'A'B'C'D'E' und den ihr zugehörigen Linien, die ihr gleiche Pyramide SABCDE und die correspondirenden Linien substituiren kann.

§. 240. Zusatz.

Hieraus folgt, daß die in irgend zweyen Pyramiden in gleichen Entfernungen von den Scheiteln derselben gemachten Schnitte, immer ein beständiges Verhältniß zu einander haben, wie auch überdieß diese Entfernungen und die Figuren der Grundflächen beschaffen seyn mögen. Denn wenn im Tantrandrum der Figur 115. die Entfernungen S'Q und S'P' den Entfernungen S'Q und S'P' in der Pyramide der Figur 116. gleich sind, so wird, da das Verhältniß der Quadrate beyder ersten dem der Quadrate beyder letztern gleich ist, das Verhältniß der Dreyecke DEF und A B C', dem der Fünfecke FGHIK und A'B'C'D'E' gleich seyn, so daß man haben wird

$$DEF : A'B'C' = FGHIK : A'B'C'D'E'$$

oder

$$DEF : FGHIK = A'B'C' : A'B'C'D'E'.$$

§. 241. Lehrsatz.

Zwey Körper, welche aus einerley Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Pyramiden zusammen gesetzt sind, müssen einander ähnlich seyn.

Beweis.

Es seyen die beyden Körper ABCDEFG, abcdefg, Fig. 119. aus einerley Anzahl ähnlicher Pyramiden

GABCDE und gabcde,

GAEF und gaef

GABF und gabf *)

deren Scheitel in den Puncten G und g sind, zusammen gesetzt, welche überdies in beyden auf eine ähnliche Art gegen einander gelegt sind.

Betrachtet man die Figur mit einiger Aufmerksamkeit, so sieht man, daß alle Flächen beyder Körper entweder ähnliche Seitenflächen von homologen Pyramiden sind, oder aus einerley Anzahl dieser Flächen, auf eine ähnliche Art gegen einander gelegt, zusammen gesetzt sind.

Die Flächen, wie ABCDE und abcde sind vom ersten Fall, weil sie zu den in beyden Körpern auf eine ähnliche Art liegenden Pyramiden GABCDE und gabcde gehören.

Eben so verhält es sich mit den Flächen ABF, abf,

---

*) Um es dem Leser zu erleichtern, sich die in jedem Körper enthaltenen Pyramiden vorstellen zu können, soll der erste Buchstabe immer den Scheitel, und die andern die Basis bezeichnen.

welche den Körpern und den Tantrandren GABF und gabf gemein sind.

Die Aehnlichkeit der Flächen DEFG und defg bezieht sich auf den zweyten Fall, weil sie respectiv aus den Dreyecken DEG und EFG, deg und efg zusammen gesetzt sind, von denen die beyden ersten den beyden letztern ähnlich sind. Eben so verhält es sich mit den Flächen BFGC und bfgc, welche aus den Dreyecken BCG und BFG, bcg und bfg zusammen gesetzt sind, die zu den Pyramiden GABCDE und GABF, gabcde und gabf gehören.

Ein ähnliches Raisonnement beweist die Aehnlichkeit aller Flächen der Körper, in welcher Anzahl sie auch seyn mögen.

Auf eben die Art würde man sich zu verhalten haben, um die Gleichheit der von diesen Flächen gebildeten Flächenwinkel einzusehen. Die einen sind gleich, weil sie den Körpern und zweyen ähnlichen Pyramiden gemein sind; von dieser Art sind die Winkel GDEA und gdea, welche einen Theil der Körper und der Pyramiden GABCDE und gabcde ausmachen; von dieser Art sind ferner die Winkel GEFA und gefa, welche zu den Tantrandren GAEF und gaef gehören.

Die andern Winkel sind gleich, weil sie aus der Vereinigung einer gleichen Anzahl gleicher Winkel gebildet sind, indem sie zu ähnlichen Pyramiden gehören. Von dieser Art sind die Winkel BFAE und bfae, welche respectiv aus den Winkeln BFAG und GAFE, bfag und gafe zusammen gesetzt sind, die zu den Pyramiden GABF und GAEF, gabf und gaef gehören. Dieselben

Schlüsse werden bey jeder Anzahl der Winkel der Körper statt finden; es könnte sich zutragen, daß diese Winkel aus mehr als aus zweyen Winkeln der Pyramide zusammen gesetzt wären; allein der Beweis würde in diesem Falle keine Aenderungen leiden. Man wird überdies leicht seine Analogie mit dem des §. 88. einsehen, der sich auf die Polygone bezieht *).

§. 242. Lehrsatz.

Wenn zwey Körper ähnlich sind, so können sie in eine gleiche Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Tantrandra zerlegt werden.

Beweis.

Es ist offenbar, daß wenn man in den homologen Flächen eines jeden der vorgelegten Körper die homologen Winkel durch Diagonallinien verbindet, auf diesen Flächen eine gleiche Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Dreyecke gebildet wird; und verbindet man in jedem Körper die Scheitel aller Winkel dieser Dreyecke mit den Scheiteln der beyden Körper, welche homolog sind, so werden beyde Körper in eine gleiche Anzahl ähn-

---

*) Es ist wohl zu merken, daß unter den verschiedenen Bedingungen, welche wir bey der Erklärung ähnlicher Körper fest gesetzt haben, es immer einige giebt, die nothwendigerweise aus den andern erfolgen; es würde aber zu umständlich seyn, hier diese verschiedenen Umstände weitläufig auseinander zu setzen, zu welchem Ende man die letzte englische Ausgabe des Euclid von R. Simson, oder die Anfangsgründe der Geometrie von Legendre zu Rathe ziehen kann.

lich liegender Tantrandra zerlegt seyn, deren Grundflächen alle ähnlich seyn werden.

Diese Tantrandra können in zwey Klassen eingetheilt werden; die einen haben zwey Flächen mit den Körpern gemein, und schließen gleiche Flächenwinkel ein, weil sie zu den Körpern gehören; sie werden also ähnlich seyn (§. 234.). Von dieser Klasse sind die Tantrandra GCDE und gcde, deren Flächen GDC und GDE, gdc und gde als homologe Dreyecke der ähnlichen Flächen DEFG und defg der Körper ähnlich sind, und überdies die zu den Körpern gehörigen Flächenwinkel CGDE, cgde einschließen.

Die Tantrandra der zweyten Klasse sind aus homologen Flächen der Tantrandra der ersten zusammen gesetzt, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind der Differenz der gleichen Winkel dieser Tantrandra, und der gleichen Winkel der Körper gleich. Von dieser Art sind die Tantrandra GCDE und gcde. In der That beweist die Vergleichung der Tantrandra GCDE und gcde, deren Aehnlichkeit schon dargethan ist, daß die Dreyecke GEC und gec ähnlich, und daß die Flächenwinkel DCGE und dcge gleich sind; die Vergleichung der Tantrandra GABC und gabc, welche zwey Flächen mit den Körpern gemein haben, nehmlich BCG und ABC mit dem ersten, bcg und abc mit dem zweyten, beweist die Aehnlichkeit der Dreyecke ACG und acg, so wie die Gleichheit der Flächenwinkel BCGA und bcga. Wenn man nun von den Flächenwinkeln BCGD und bcgd, welche einander gleich sind, weil sie von den homologen Flächen der Körper gebildet werden, die Win-

kel DCGE und dcge, BCGA und bcga, deren Gleichheit schon bewiesen ist, abzieht, so werden die übrig bleibenden Flächenwinkel ACGE und acge einander gleich seyn; die Tantrandra GAEC und gaec werden also einander ähnlich seyn. Durch ähnliche Betrachtungen kann man die Aehnlichkeit aller Tantrandra beweisen, welche keine zwey Flächen mit den Körpern gemein haben.

Die Aehnlichkeit der Dreyecke ACG und acg, welche von den Diagonalen des Körpers gebildet werden, ist wohl in Erwägung zu ziehen, weil daraus erfolgt, daß die Scheitel der homologen körperlichen Ecken, A, G, C, a, g, c in den Ebnen, welche sie mit einander verbinden, gegen einander eine ähnliche Lage haben; und da diese Flächen selbst gegen die sie schneidenden Flächen ähnlich liegend und gleich geneigt sind, so kann man daraus schließen, daß die Scheitel der homologen körperlichen Ecken, in den ähnlichen Körpern und gegen die homologen Flächen dieser Körper, eine ähnliche Lage haben. Dieser Beweis ist dem des §. 89. in Beziehung auf die Polygone völlig analog.

§. 243. Lehrsatz.

Die homologen Gränzen ähnlicher Körper, so wie die Diagonalen ähnlicher Seitenflächen und die innerhalb der Körper gezogenen Diagonalen, sind proportional.

Beweis.

Wenn man successiv die homologen Flächen BCGF und bcgf, und die Dreyecke AGC und agc mit einander vergleicht, so wird man diese Reihe gleicher Verhältnisse erhalten;

$$BC : bc = BF : bf = FG : fg = BG : bg = GC : gc,$$
$$GC : gc = AC : ac = AG : ag,$$

welche sich durch das Verhältniß GC : gc mit einander verbinden, und welche man ebenfalls mit den aus der Vergleichung der andern homologen Flächen hergeleiteten Reihen gleicher Verhältnisse vergleichen kann.

§. 244. Anmerkung.

Ich werde mich nicht in eine weitläuftige Auseinandersetzung über die Berechnung des Flächeninhalts der Oberflächen der Körper einlassen; denn da diese Flächen die von ebnen Figuren sind, so können sie immer vermittelst der Sätze des IIten Abschnitts der Isten Abtheilung gefunden werden. Ich will bloß noch bemerken, daß die Summe der Parallelogramme, welche ein Prisma umgeben, mit Ausschluß der beyden Grundflächen, dem Producte aus einer der Gränzen AF, BG, CH ꝛc. des Prisma Fig. 117., durch den Umfang eines durch eine auf derselben senkrechte Ebne gemachten Durchschnitt LMNOP gleich ist. Denn es folgt aus §. 195., daß die Seiten LM, MN, NO ꝛc. dieses Durchschnitts die Höhen der Parallelogramme ABGF, BCHG, CDHI ꝛc. sind, wenn man die Gränzen AF, BG, CH ꝛc. für die Grundlinien nimmt; man wird also haben

$$ABGF = \overline{AF} \times LM, \quad BCHG = \overline{BG} \times \overline{MN} \text{ ꝛc.}$$

und da die Gränzen AF, BG ꝛc. einander gleich sind, so wird die Summe des Flächeninhalts aller das Prisma umgebenden Parallelogramme gleich seyn, einer derselben, multiplicirt durch LM + MN + ꝛc.

§. 245. Lehrsatz.

Die Oberflächen ähnlicher Körper verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate der homologen Gränzen.

Beweis.

Jede Fläche des ersten Körpers verhält sich zu der ihr correspondirenden im zweyten, wie das Quadrat einer ihrer Seiten zum Quadrate der homologen Seite der andern (§. 176.); da aber diese Seiten homologe Gränzen der Körper sind, so haben sie in beyden Körpern einerley Verhältniß (§. 243.); ihre Quadrate werden also eine Reihe gleicher Verhältnisse bilden; und da diese Verhältnisse mit denen der homologen Flächen einerley sind, so kann man daraus schließen, daß diese letztern einander gleich sind. Es verhält sich also die Summe aller Flächen des ersten Körpers zur Summe aller Flächen des zweyten, wie sich eine Fläche des ersten zu der ihr corrrspondirenden Fläche des zweyten, oder wie sich das Quadrat einer der Gränzen des ersten zum Quadrat der homologen Gränze des zweyten verhält. Substituirt man in diese Proportion statt der Summen der Flächen die ganzen Flächen der Körper, welche sie bilden, so wird daraus folgen, daß sich diese Flächen wie die Quadrate der homologen Seiten verhalten.

Vom Maaße der Körper.

§. 246.

Der von den Flächen eines Körpers eingeschlossene Raum wird der körperliche Inhalt, das Volumen

des Körpers genannt. Unter den verschiedenen Gestalten, welche Körper haben können, kann es sich doch zutragen, daß sie an körperlichem Innhalte gleich sind, so wie ebne Figuren von sehr verschiedener Form gleichen Flächeninhalt haben können (§. 159.).

§. 247. Lehrsatz.

Zwey Parallelepipeda, welche auf einerlei Grundfläche stehen, und oberhalb derselben durch eine und dieselbe ihrer Basis parallele Ebne begränzt werden, haben gleiches Volumen.

Beweis.

Hierbey sind zwey Fälle in Erwägung zu ziehen; in dem einen, welchen die beiden Figuren 120. darstellen, und mit dem wir uns zuerst beschäftigen wollen, sind die Parallelepipeda AG und AL seitwärts zwischen denselben parallelen Ebnen AK und DL eingeschlossen. Bey diesem Zustande der Dinge ist nun offenbar, daß die dreyeckigen Prisma AEIDHM und BFKCGL einander gleich sind (§. 229.); denn die Dreyecke AEI und BFK, welche ihnen als Grundflächen dienen, sind wegen der Parallelen AE und BF, AI und BK einander gleich (§. 16.), und die Parallelogramme AEHD und BFGC, AIMD und BKLC sind ebenfalls einander gleich (§. 231.). Zieht man nun vom Körper AL einerseits das Prisma AEIDHM und andererseits das Prisma BFKCGL ab, so werden die übrig bleibenden Parallelepipeda ABCDEFGH und ABCDIKLM oder AG und AL einander gleich seyn.

Den zweyten Fall stellt Fig. 121. dar, wo die bey-

den Parallelepipeda ABCDIKLM und ABCDNOPQ, welche gegen ihre Basis nach zweyen verschiedenen Richtungen geneigt sind, nur ihre untere Basis ABCD, und die Ebne, welche ihre obere Flächen IKLM und NOPQ enthält, gemein haben. Er wird auf den vorhergehenden zurückgebracht, wenn man die Ebnen ABIK und DCLM, mit den Ebnen ADQN und BCBO zu gleicher Zeit verlängert, um das Parallelepipedum ABCDEFGH (§. 232.) zu bilden, welches dem Parallelepipedum ABCDIKLM gleich seyn wird, weil die Seiten desselben in einerley parallelen Ebnen AK und DL liegen. Dasselbe Parallelepipedum ABCDEFGH, als zwischen den parallelen Ebnen BP und AQ liegend betrachtet, wird auch dem Parallelepipedum ABCDNOPQ gleich seyn; es werden daher auch die Parallelepipeda ABCDIKLM und ABCDNOPQ, oder AL und AP einander gleich seyn.

§. 248. Zusatz.

Vermittelst des vorhergehenden Lehrsatzes kann man beweisen, daß jedes Parallelepipedum AL, dessen Gränzen AI, BK, DM, CL gegen die Grundfläche geneigt sind, einem andern AP gleich ist, welches auf derselben Grundfläche construirt ist, dessen Gränzen hingegen, nehmlich AN, BO, CP, DQ auf dieser Basis senkrecht sind.

Man kann endlich dieses letztere Fig. 122. in ein andres ABRSNOTU oder AG verwandeln, welches zur Basis das dem Parallelogramm ABCD gleiche Rechteck ABRS hat, und dessen Gränzen noch immer auf seiner Basis senkrecht sind; denn wenn man die Parallel-

epipeda AP und AG als auf einerley Basis ABON stehend betrachtet, so sind sie vom ersten Fall des vorhergehenden §.

Es ist klar, daß in diesem Falle alle Flächen des Parallelepipedums Rechtecke sind; man nennt sie deshalb **rechtwinklichte Parallelepipeda**; und man schließt aus dem obigen, daß ein jedes Parallelepipedum, welches mit einem rechtwinklichten Parallelepipedum auf gleichen Grundflächen construirt, und durch eine und dieselbe ihren Grundflächen parallele Ebne begränzt, oder von einerley Höhe ist, gleiches Volumen haben.

Die Höhe eines Prisma, oder eines Parallelepipedums, ist die zwischen ihren beyden Grundflächen geführte senkrechte.

§. 249. Lehrsatz.

Wenn man auf die Grundfläche eines dreiseitigen Prisma ein Parallelogramm bildet, und auf dieses Parallelogramm, als Basis, ein Parallelepipedum von gleicher Höhe mit dem dreyseitigen Prisma bildet, so ist das erste die Hälfte von letztern.

Beweis.

Es sey das dreyeckige Prisma ABCEFG Fig. 118.; vollendet man auf der Basis das Parallelogramm ABCD, und führt durch den Punct D die Gerade DH, welche den Geraden AE, BF, CG parallel ist, und sich in der Ebne der obern Fläche EFG des vorgelegten Prisma endigt, so werden die Ebnen AEHD und DHGC, welche respectiv den Ebnen BFGC und AEFB parallel

sind (§. 216.) das Parallelepipedum vollenden, und mit der Ebne AEGC ein zweytes dreyeckiges Prisma ADCEHG bilden, in welchem die Theile, welche es bilden, denen des Prisma ABCEFG gleich seyn werden. Denn die Seitenflächen, welche Parallelogramme sind, so wie die Grundflächen, sind in beyden gleich; und da die von einer Ebne geschnittenen parallelen Ebnen offenbar in Rücksicht der Flächenwinkel dieselben Eigenschaften haben, welche parallele Gerade und ihre Secante gegen die ebnen Winkel haben (§. 206.), so werden die Flächenwinkel AEHG und GCBA, DHGE und FBAC, AEGH und EACB einander gleich seyn. Man sieht hieraus, daß das dreyeckige Prisma ADCEHG unterhalb der Ebne EHG aus denselben Theilen construirt ist, welche das Prisma ABCEFD oberhalb ABC zusammen setzen, und daß folglich diese beyden Körper, welche überdieß zur Klasse derjenigen gehören, die nicht auf einander fallen können, einerley Raum einnehmen müssen; der körperliche Inhalt eines jeden derselben wird also die Hälfte von dem des Parallepipedums seyn, welches sie zusammen setzen *).

) Wenn diese Gleichheit nicht evident genug scheinen sollte, so kann man sie folgendermaßen beweisen: durch die äußersten Puncte A, E, einer Gränze des Parallelepipedums BH, Fig. 122, führe man auf diese Gränze senkrechte Ebnen, und bilde auf diese Art das Parallelepipedum NE, dessen Gränzen auf der Grundfläche AMNO senkrecht seyn werden, und welches die Ebne DBHF in zwey dreyeckigte Prisma AOMELI, MNOIKL theilt, welche offenbar einander gleich sind, weil ihre Seitenflächen gleich und ähnlich liegend, und ihre corre-

§. 250. Zusatz.

Hieraus folgt, daß zwey dreyeckigte Prismen von einerley Grundfläche und Höhe einander gleich sind, weil sie Hälften von gleichen Parallelepipeden sind.

§. 251. Lehrsatz.

Wenn man ein Täträdrum SABC, Fig. 126., durch Ebnen schneidet, welche der Grundfläche ABC parallel sind, und von einander gleichen Abstand haben, so kann man auf jeden Streifen, wie ABCFGH, ein äußeres Prisma ABCDEH oder AH, und ein inneres Prisma abCFGH oder aH dergestalt setzen, daß die Summe der erstern von denen der zweyten so wenig als man will unterschieden seyn kann, und folglich auch vom Täträdrum.

---

spondirenden Flächenwinkel gleich sind; jedes dieser Prisma ist also die Hälfte des Parallelepipedums NE, und folglich auch die Hälfte des Parallelepipedums BH, weil diese beyden Parallelepipeda gleich sind, weil sie ihre Grundflächen ADHE, AOLE gleich und einerley Höhe haben. Dieses vorausgesetzt, ist leicht einzusehen, daß die viereckigen Pyramiden AMBDO und EIFHL einander gleich sind, weil sie ihre Seitenflächen gleich und ähnlich liegend, und ihre Flächenwinkel gleich haben; und wenn man sie nach einander vom Körper AMOEFH abzieht, so werden die Reste der beyden dreyeckigen Prisma AOMELI, ABDEFH seyn; da nun diese beyden Prisma einander gleich sind, und das erste die Hälfte des Parallelepipedums NE ist, so ist das zweyte die Hälfte des Parallelepipedums DH, welches dem vorigen gleich ist.

Dieser sehr einfache Beweis ist mir von einem meiner Zuhörer, dem jungen Fournier, mitgetheilt worden.

Beweis.

Diese Prisma werden gebildet, wenn man durch die Puncte A und B, F und G, L und M ꝛc. die Geraden AD und BE, Ia und Kb, Of und Pg ꝛc. zur Gränze CS parallel führt; und sie haben zur Höhe die Dicke der Streifen. Die Differenz zwischen den Prismen AH und aH ist das auf dem Trapezium ABba, als der Differenz der Dreyecke ABC und abC gebildete Prisma AG; die der Prisma FN und fN ist das auf dem Trapezium FGgf, als Differenz der Dreyecke FGH und fgH gebildete Prisma FM; eben so verhält es sich mit jedem Streifen des Täträdrums, außer dem letzten, welcher kein inneres Prisma giebt.

Nun ist klar, daß die Differenz zwischen der Summe der äußern und innern Prismen, der Summe der Prismen AG, FM, LR und QS gleich ist, die alle einerley Höhe, und zur Basis die Trapezia Ab, Fg, Lm und das Dreyeck QRT haben; aber die Summe dieser Prismen ist dem ersten äußern Prisma gleich, weil die Prisma QS und IT, LT und fN, FN und aH je zwey und zwey gleich sind (§. 250.): es folgt also, daß

$$QS + LR = IT + LR = LT,$$
$$LT + TM = fN + TM = FN,$$
$$FN + AG = aH + AG = A \text{ oder } ABCDEH.$$

Da man nun die schneidenden Ebnen einander so nahe als man will nehmen kann, so kann man nach und nach die Dicke der Streifen so sehr vermindern, daß die Differenz der äußern und der innern Prisma kleiner als ein gegebenes Prisma wird, so klein dieses letztere auch seyn mag. Da aber das Täträdrum SABC größer als

die Summe der innern und kleiner als die der äußern Prisma ist, so folgt, daß man es immer dergestalt wählen kann, daß seine Differenz zwischen einer dieser Summen, welche Differenz nothwendigerweise kleiner als das Prisma ABCDEH wird, auch kleiner als ein gegebenes Prisma seyn wird, so klein man auch dieses letztere nehmen mag.

§. 252. Lehrsatz.

Zwey Täträdra von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich.

Beweis.

Wenn man sich auf jedem dieser Täträdra SABC, S'A'B'C', eine Reihe äußerer correspondirender Prisma gelegt denkt, so werden diese zwischen parallelen Ebnen liegenden Prisma einerley Höhe haben. Da die Schnitte, welche ihnen zu Grundflächen dienen, respectiv einerley Entfernung haben, so wie die gleichen Dreyecke ABC, A'B'C', als Grundflächen der Täträdra, so sind sie ordnungsweise einander gleich (§. 240.); die äußern correspondirenden Prisma sind also einander gleich; mithin ist die Summe der äußern Prisma des einen Täträdrums ist der der äußern Prisma des andern gleich. Wenn also S und S' diese Summen bezeichnen, so wird man haben

$$S = S', \text{ oder } \frac{S}{S'} = 1;$$

Da man aber die Differenz zwischen jeder dieser Summen, und dem Täträdrum, zu welchem sie gehören, so klein als man will machen kann, so kann die Differenz zwischen den Verhältnissen $\frac{S}{S'}$ und $\frac{SABC}{S'A'B'C'}$ kleiner als

jede gegebene Größe werden; und da es hierdurch auch die des unveränderlichen Verhältnisses $\frac{SABC}{S'A'B'C'}$ und der Einheit wird, so folgt, daß $\frac{SABC}{S'A'B'C'} = 1$ (§. 153.), oder daß $SABC = S'A'B'C'$ *).

§. 253. Lehrsatz.

Ein jedes Täträdrum ist der dritte Theil eines Prisma von einerley Grundfläche und Höhe.

Beweis.

Wenn man durch die Puncte A und C der Grundfläche ABC des Täträdrums EABC Fig. 127. die Geraden AD und CF der Gränze AE gleich und parallel führt, so werden sie ein dreyeckiges Prisma ABCDEF bestimmen. Wenn man nun durch die Scheitel A, B, C der körperlichen Ecken dieses Prisma eine Ebne legt, so wird sie zuvörderst das vorgelegte Täträdrum EABC davon abschneiden, dessen Höhe und Basis mit denen des Prisma einerley ist; es wird dann noch die viereckigte Pyra-

*) Man könnte unmittelbar beweisen, daß es eine Ungereimtheit wäre, eins der Täträdra größer als das andre anzunehmen; man dürfte in dieser Absicht nur die äußern Prisma dergestalt annehmen, daß die Differenz der auf dem als kleiner angenommen, construirten Prisma, und diesem Täträdrum kleiner als die der beyden Täträdra sey; denn es würde daraus erfolgen, daß die Summe der äußern auf dem als größer angenommenen Täträdrum construirten Prisma, kleiner als dieses Täträdrum wäre.

Pyramide EACFD übrig bleiben, die in E'A'C'F'D' besonders dargestellt ist, deren Scheitel in E ist, und welche zur Basis die hintere Fläche ACFD des Prisma haben wird. Läßt man nun durch die Puncte D, E, C von neuem eine Ebne gehen, so wird sie diese Pyramide in zwey Täträdra EACD, ECFD zerlegen, die in E''A''C''D'', E'''C'''F'''D''' besonders dargestellt sind. Ihre Höhen sind gleich, weil ihre Scheitel in einem und demselben Punct E, und ihre Grundflächen in einer und derselben Ebne liegen. Diese Grundflächen sind ebenfalls einander gleich, weil sie Hälften des Parallelogramms ACFD sind; die Täträdra EACD, ECFD werden also einander gleich seyn (vorherg. §.); aber das zweyte, welches so betrachtet werden kann, als hätte es zur Basis das dem Dreyecke ABC gleiche Dreyeck DEF, und seinen Scheitel in C, wird mit dem Prisma einerley Grundfläche und Höhe haben, und folglich dem ersten Täträdrum EABC gleich seyn; es sind also die Täträdra EABC, EACD, ECFD einander gleich; mithin ist jedes derselben der dritte Theil des dreyeckigten Prisma, welches sie zusammen setzen.

§. 254. Lehrsatz.

Die rechtwinklichten Parallelepipeda von einerley Grundfläche verhalten sich gegen einander wie ihre Höhen.

Beweis.

Es seyen die rechtwinklichten Parallelepipeda AG und IP Fig. 123., deren Grundflächen AC und IL gleiche Rechtecke sind.

1) Wenn die Höhen AE und IN commensurable

sind, so werden, wenn man sie in Theile Aa und Ii zerlegt, welche ihrem gemeinschaftlichen Maaße gleich sind, und durch die Puncte a und i Ebnen führt, die der AC und IL parallel sind, Parallelepipeda Ac und Il gebildet, welche einander gleich sind (§. 229.). Da nun die Anzahl dieser Parallelepipeda in AG dieselbe ist, als die der in AE enthaltenen gleichen Theile, und in IP dieselbe als die der in IN enthaltenen gleichen Theile, so wird man offenbar haben

$$AG : IP = AE : IN.$$

2) Wenn die Höhen AE und IN nicht commensurable sind, so kann man auf dem Wege des in §. 166. gegebenen Beweises darthun, daß das Verhältniß des Parallelepipedums AG zum Parallelepipedum IP weder größer noch kleiner, als das von AE zu IN seyn kann. Denn wenn man diese Proportion annähme

$$AG : IP = AE : IR,$$

und $IR > IN$, so könnte man auf IN kleinere aliquote Theile als NR tragen, und durch den Theilpunct n, welcher zwischen N und R fällt, könnte man eine zur Ac parallele Ebne führen, um das Parallelepipedum Ip zu bilden; hierdurch wird man haben

$$AG : Ip = AE : In;$$

aus dieser Proportion und der vorhergehenden zieht man

$$IP : Ip = IR : In$$

ein ungereimtes Resultat, weil $IP < Ip$ und $IR > In$.

Man kann eben so wenig haben

$$AG : IP = AB : IR' \text{ und } IR' < IN;$$

denn für einen zwischen R' und N liegenden Theilpunct n' würde man haben

$$AG : Ip' = AE : In,$$

woraus man schließen kann

$$IP : Ip' = IR' : In',$$

welches noch immer ungereimt ist, weil $IP > Ip'$ und $IR' < In'$.

§. 252. Lehrsatz.

Jede zwey rechtwinklichte Parallelepipeda AG und IP Fig. 124. verhalten sich gegen einander wie die Producte der Gränzen, welche einerley körperliches Dreyeck bilden.

Beweis.

Wenn man auf der Gränze IN des Parallelepipedums IP einen Theil $II' = AE$ nimmt, und auf der Gränze BC des Parallelepipedums AG einen Theil $BC' = IM$ nimmt, und dann die Ebne $I'L'$ der IL, und die Ebne $C'H'$ der AB parallel führt, so wird man die Parallelepipeda IL' und AG' bilden, welche zu Grundflächen die Rechtecke IM' und AH von einerley Grundlinie und Höhe haben; man hat also nach dem vorhergehenden §.

$$AG' : IL' = AB : IK;$$

und vergleicht man die Parallelepipeda AG und AG', die das Rechteck AF zur Basis haben, so wird kommen

$$AG : AG' = AD : AD'.$$

Multiplicirt man beyde Proportionen nach der Ordnung, und läßt man den beyden Gliedern des ersten zusammen gesetzten Verhältnisses gemeinschaftlichen Factor AG' hinweg, so erhält man, wenn statt AD' die ihr gleiche IM substituirt wird,

$$AG : IL = \overline{AB} \times \overline{AD} : \overline{IK} \times \overline{IM}.$$

Endlich geben die Parallelepipeda IL′ und IP, welche einerley Grundfläche IKLM haben, folgende Proportion:

$$IL' : IP = II' : IN.$$

Multiplicirt man ferner diese Proportion und die vorhergehende nach der Ordnung, so erhält man, wenn man den Factor IL′ hinweg läßt, und statt II′ die ihre gleiche AE setzt

$$AG : IP = \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AE} : \overline{IK} \times \overline{IM} \times \overline{IN},$$

welches den Vortrag des Satzes giebt.

§. 256. Anmerkung.

Nimmt man zur Vergleichung aller rechtwinklichten Parallelepipeda das rechtwinklichte Parallelepipedum ag Fig. 125., dessen drey anliegende Gränzen ab, ad, ae, der als Einheit, oder als gemeinschaftliches Maaß der Geraden genommenen Linie gleich sind, so wird ihr Product die Einheit seyn, und man wird haben

$$ag : AG \; 1 : \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AE},$$

das heißt: das rechtwinklichte Parallelepipedum AG wird so viel Mahl das rechtwinklichte Parallelepipedum ag enthalten, als das Product der Linien AB, AD, AE, in Beziehung auf das gemeinschaftliche Maaß ab, die Einheit enthält. Dieses ist darunter zu verstehen, wenn man sagt, daß das Maaß des Volumens eines rechtwinklichten Parallelepipedums, das Product aus seinen drey anliegenden Gränzen ist; und zieht man in Erwägung, daß das Product $\overline{AB} \times \overline{AD}$ die Anzahl der dem ac gleichen Quadrate angiebt, die in der Basis AC enthalten sind, oder, welches auf eins hinaus kommt, daß es den

Flächeninnhalt der Basis angiebt, so kann man daraus schlteßen, daß das Volumen eines rechtwinklichten Parallelepipedums das Product aus der Grundfläche in dessen Höhe, wo beyde in Zahlen ausgedrückt sind, zum Maaße hat.

Im Falle die Gränzen AB, AD und AE die Seite ab des Parallelepipedums ag, eine Anzahl Mahl genau enthalten, so sieht man beym bloßen Anblick der Figur, daß man auf die Basis AC so viele der ag gleiche Parallelepipeda tragen könne, als diese Basis die Basis ac enthält, und daß man ferner ein Parallelepipedum von derselben Basis als AC, und derselben Höhe als ag bilden könne, welches in AG so viele Mahl enthalten seyn wird, als die Höhe AE, die Höhe ae oder die Seite ab enthält; woraus ferner folgt, daß das Parallelepipedum AG so viele der ag gleiche Parallelepipeda enthält, als das Product aus der Basis ABCD in die Höhe AE Einheiten hat.

§. 257. Erster Zusatz.

Wenn die drey Seiten AB, AD, AE einander gleich wären, so würde das Volumen des Parallelepipedums von $\overline{AB}^2 \times \overline{AB} = \overline{AB}^3$, oder von der dritten Potenz der Seite AB gemessen werden; es ist indessen offenbar, daß in diesem Falle die sechs Seitenflächen des rechtwinklichten Parallelepipedums AG gleiche Quadrate werden. Man belegt es alsdann mit dem Namen des Cubus, und daher rührt es auch, daß man die dritte Potenz einer Zahl ihren Cubus nennt.

§. 258. Zweyter Zusatz.

Da ein jedes Parallelepipedum immer in ein recht-

winklichtes von gleicher Grundfläche und derselben Höhe verwandelt werden kann (§. 248.), so folgt, daß das Volumen eines jeden Parallelepipedums, das Product aus seiner Grundfläche in die Höhe zu seinem Maaße hat.

§. 259. Dritter Zusatz.

Da das Volumen eines dreyseitigen Prisma ABCEFG, Fig. 118., der Hälfte von dem des Parallelepipedums ABCDEFGH gleich ist (§. 249.), so wird es nach dem Vorhergehenden die Hälfte des Products aus der Basis dieses Parallelepipedums in seine Höhe haben; da aber das Dreyeck ABC, welches die Basis des Prisma bildet, nur die Hälfte von der des Parallelepipedums ist, so hat offenbar das Volumen eines dreyseitigen Prisma das Product aus seiner Grundfläche in die Höhe zu seinem Maaße.

Man kann sich leicht überzeugen, daß sich das Volumen eines Prisma von irgend einer Basis ABCDE, Fig. 117., sich auf eben die Art ausdrücken läßt; denn wenn man das Polygon ABCDE durch Diagonallinien AC, AD in Dreyecke zerlegt, und durch diese Diagonalen und die ihnen anliegenden parallelen Gränzen AF und CH, AF und DI Ebnen legt, so wird man das Prisma AI in drey dreyeckigte Prismen von einerley Höhe zerlegen, deren Grundflächen ABC, ACD, ADE seyn werden. Bezeichnet man nun die gemeinschaftliche Höhe dieser Prismen, oder die senkrechte Entfernung der Ebnen, welche ihre obern und untern Flächen enthalten, durch H, so werden die Maaße ihrer Volumen respectiv seyn

$\overline{ABC} \times H$, $\overline{ACD} \times H$, $\overline{ADE} \times H$;
ihre Summe $(ABC + ACD + ADE)\,H = ABCDE \times H$,
wird das Volumen des ganzen Prisma AI geben.

Wir schließen ferner hieraus, daß sich die Volumina irgend zweyer Prisma wie die Producte ihrer Grundfläche und Höhe verhalten, und daß sie sich folglich wie ihre Höhen verhalten, wenn sie gleiche Grundflächen haben, oder wie ihre Grundflächen, wenn sie gleiche Höhe haben, wie auch übrigens diese Grundflächen beschaffen seyn mögen.

§. 260. Vierter Zusatz.

Aus dem eben bewiesenen folgt, daß das Volumen eines Täträdrums, den dritten Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe zum Maaße hat, weil dieses Volumen der dritte Theil von dem des Prisma ist, welches vom Producte aus der Grundfläche in die Höhe gemessen wird (§. 253.).

§. 261. Fünfter Zusatz.

Dieselben Maaße kommen auch allen Pyramiden zu; denn wenn man die Basis ABCDE irgend einer Pyramide SABCD Fig. 116. im Dreyecke zerlegt, und durch den Scheitel, und jede der Diagonalen AC, AD, Ebnen legt, so wird diese Pyramide in drey Täträdra von einerley Höhe verwandelt werden, deren Grundflächen ABC, ACD, ADE sind; da nun das Volumen eines jeden dieser Täträdra vom dritten Theil des Products aus seiner Grundfläche in dessen Höhe gemessen wird, so wird die Summe der Volumina aller drey,

oder die der vorgelegten Pyramide, offenbar dem dritten Theil des Products, aus der Summe ihrer Grundflächen in die gemeinschaftliche Höhe, das heißt, dem dritten Theil aus der Grundfläche der vorgelegten Pyramide, in ihrer Höhe gleich seyn.

Hieraus folgt, daß sich jede zwey Pyramiden wie die Producte aus ihrer Grundfläche und Höhe zu einander verhalten, und bloß wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich sind, oder wie ihre Höhen, wenn ihre Grundflächen gleich sind.

Da man die Höhe einer Pyramide finden kann, von welcher ein gegebener, der Basis paralleler Streifen, einen Theil ausmacht (§. 238), so kann man offenbar das Volumen dieses Streifens finden, wenn man besonders das Volumen der ganzen Pyramide, das der abgezogenen Pyramide berechnet, und die Differenz beyder Resultate nimmt.

§. 262. Anmerkung.

Da ein jeder Körper in Pyramiden zerlegt werden kann (§. 230), so wird der Werth desselben gefunden werden können, wenn man nach dem Vorhergehenden jede Pyramide, welche er enthält, besonders berechnet, und die Summe der Resultate nimmt; wir wollen uns nicht beym Messen der Körper im Allgemeinen aufhalten. Indessen giebt es eine Art vieleckigter Körper, auf die alle übrige zurückgeführt werden können, und die deshalb wohl zu merken sind: ich meine die abgekürzten dreyeckigten Prisma, welche von den gewöhnlichen dreyeckigten Prismen nur darin unterschieden sind, daß

die ihren Grundflächen entgegen stehenden Ebnen denselben nicht parallel, und daß folglich ihre Seitenflächen keine Parallelogramme, sondern Trapezia sind. ABCDEF Fig. 128. ist ein dreyeckiges abgekürztes Prisma.

§. 263. Lehrsatz.

Ein abgekürztes dreyeckiges Prisma ist immer dreyen Täträdren auf einerley Grundfläche gleich, welche ihre Scheitel respectiv in jedem der Winkel des der Basis gegenüber stehenden Dreyecks haben.

Beweis.

Wenn man durch die drei Puncte A, C, E eine Ebne legt, so kann man zuvörderst das Täträdrum EABC vom Prisma ABCDEF trennen, und ersteres wird ABC, die Basis des Prisma, zur Basis, und seinen Scheitel im Winkel E des dieser Basis gegenüber stehenden Dreyecks DEF haben. Alsdann wird noch die viereckige Pyramide EACFD übrig bleiben, welche in zwey Täträdra EACD, ECFD zerlegt werden kann, wenn man durch die Diagonale DC und durch den Punct E die Ebne DEC legt. Diese Täträdra sind nicht die, welche im Vortrage angegeben sind; stellt man hingegen das Prisma wieder ganz her, so kann man leicht beweisen, daß sie diesen letztern gleich sind.

Denn, wenn man in der Seitenfläche ABED die Diagonale BD zieht, und sich die Ebne BDC denkt, so wird man das auf der Basis ACD des Täträdrums EACD construirte Täträdrum BACD haben, welches mit ersterem einerley Höhe hat, weil ihre Scheitel B

und E in einer und derselben zur Ebne ihrer Basis parallelen Geraden BE liegen. Man kann aber auch das Täträdrum BACD so ansehen, als hätte es seinen Scheitel im Puncte D, und zur Basis das Dreyeck ABC; mithin ist dieses Täträdrum das, welches der Vortrag angiebt.

Um das dem ECFD gleiche Täträdrum zu finden, braucht man nur in den Flächen ACFD und BCFE die Diagonalen AF und BF zu ziehen; denkt man sich dann die Ebne AFB, so hat man das Täträdrum BACF, dessen Grundfläche ACF der Basis CFD des Täträdrums ECFD gleich ist, weil diese beyden Dreyecke einerley Basis CF haben, und zwischen den Parallelen AD und CF liegen; da überdies die Täträdra ihre Scheitel auf einer und derselben zur Ebne der Basis parallelen Geraden BE haben, so haben sie zugleich einerley Grundfläche und Höhe, und sind folglich gleich. Das Täträdrum BACF, welches so betrachtet werden kann, als hätte es seinen Scheitel in F, und zur Basis das Dreyeck ABC, wird das dritte im Vortrage angegebene Täträdrum seyn.

§. 264. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze folgt, daß das Volumen eines abgekürzten dreyeckigen Prisma zum Maaße hat, das Product aus der Grundfläche, in den dritten Theil der Summe der von den drey Winkeln der obern Fläche auf die Basis herabgelassenen drey senkrechten Linien, weil diese senkrechte die respectiven Höhen der Täträdra sind, deren Summe dem Prisma gleich ist, und welche alle zur Grundfläche die des Prisma haben.

§. 265. Lehrsatz.

Zwey ähnliche vieleckigte Körper verhalten sich gegen einander, wie die Cubi ihrer homologen Gränzen.

Beweis.

1) Wenn die vorgelegten Körper die Pyramiden SABCDE, S′FGHIK, Fig. 116. sind, so hat man nach §. 239.

$$ABCDE : FGHIK = \overline{SP}^2 : \overline{S'Q}^2;$$

multiplicirt man diese Proportion durch die offenbar richtige Proportion

$$\tfrac{1}{3}SP : \tfrac{1}{3}S'Q = SP : S'Q,$$

so wird kommen

$$\overline{ABCDE} \times \tfrac{1}{3}\overline{SP} : \overline{FGHIK} \times \tfrac{1}{3}\overline{S'Q} = \overline{SP}^3 : \overline{S'Q}^3,$$

Die beyden ersten Glieder dieser Proportion, welche die Volumina der vorgelegten Pyramiden ausdrücken, lehren uns, daß diese Volumina sich wie die Cuben ihrer Höhen verhalten; aber die Aehnlichkeit der Pyramiden giebt auch

$$SP : S'Q = SA : S'F = AB : FG \text{ (§. 237.)},$$

woraus man zieht

$$\overline{SP}^3 : \overline{S'Q}^3 = \overline{SA}^3 : \overline{S'F}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{FG}^3,$$

und folglich

$$SABCDE : S'FGHIK = \overline{SA}^3 : \overline{S'F}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{FG}^3;$$

das heißt, daß sich ähnliche Pyramiden, wie die Cuben ihrer homologen Gränzen verhalten, diese Gränzen mögen nun vom Scheitel ausgehen, oder sich auf der Basis befinden.

2) Sind es irgend zwey andre vieleckige Körper,

so kann man sich dieselben in einerley Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Pyramiden zerlegt denken (§. 242.). Jede der Pyramiden des einen wird sich zu der ihr correspondirenden Pyramide der zweyten verhalten wie der Cubus einer ihrer Gränzen zum Cubus der homologen Gränze der andern Pyramide; da aber diese Gränzen, welche nothwendigerweise entweder die Gränzen der vorgelegten vieleckigten Körper selbst, oder die Diagonalen ihrer Seitenflächen, oder endlich die Diagonalen, welche innerhalb die Scheitel ihrer körperlichen Ecken verbindet, seyn müssen, haben in beyden Körpern einerley Verhältniß (§. 243.); ihre Cuben werden also eine Reihe gleicher Verhältnisse bilden, und da diese Verhältnisse denen der Pyramiden gleich sind, so kann man daraus schliessen, daß auch diese letztern einander gleich sind; mithin wird sich die Summe aller Pyramiden des ersten zur Summe aller Pyramiden des zweyten verhalten, wie irgend eine Pyramide des ersten zur correspondirenden des andern, oder wie der Cubus irgend einer Gränze des ersten zum Cubus der homologen Gränze des andern. Substituirt man in diese Proportion statt der Summen der Pyramiden, die Körper, welche sie zusammen setzen, so wird daraus folgen, daß sich diese Körper wie die Cuben ihrer homologen Seiten verhalten.

Zweyte Abtheilung.

Zweyter Abschnitt.

Von den runden Körpern.

§. 266.

Die runden Körper sind diejenigen, welche entstehen, wenn man eine ebne Figur um eine gerade Linie herum bewegen läßt. Wir wollen uns hier besonders nur mit dem geraden Kegel, dem geraden Cylinder und der Kugel beschäftigen.

Der gerade Kegel wird erzeugt, wenn man ein rechtwinklichtes Dreyeck SAC Fig. 129. um eine seiner Cathe[illegible] SC herumdrehen läßt; die Hypothenuse SA beschreibt bey dieser Bewegung die gerade Regelfläche, welche den Körper einschließt.

Ein jeder Punct A′ dieser Geraden beschreibt den Umkreis eines Zirkels, dessen Mittelpunct auf der geraden Linie liegt, um welche sich das Dreyeck SAC dreht, und welche man aus dieser Ursache die Axe des Kegels nennt; denn wenn man sich im erzeugenden Dreyecke die Gerade A′C′ auf diese Axe senkrecht gezogen, und mit demselben umdrehend denkt, so wird sie eine auf der Axe SC senkrechte Ebne beschreiben, und offenbar der Halbmesser des Kreises A′D′B′ seyn.

Man sieht hieraus, daß die Kegelfläche von einer

auf ihrer Axe senkrechten Ebne geschnitten, den Umkreis eines Zirkels giebt. Der Schnitt würde offenbar eine gerade Linie seyn, wenn die schneidende Ebne durch ihren Scheitel ginge.

Der von der Seite AC des erzeugenden Dreyecks beschriebene Kreis ADB, welcher den Kegel unterhalb begränzt, ist die Basis, der Punct S aber der Scheitel, und diese Basis ist auf der Axe AC senkrecht *).

Die ähnlichen Dreyecke SAC und S'A'C', welche geben

$$AC : A'C' = SC : SC' = SA : SA'$$

zeigen, daß die Halbmesser der Kreise ADB und A'D'B' der Entfernung ihrer Ebne vom Scheitel des Kegels proportional sind; da aber die Umkreise der Zirkel sich wie die Halbmesser (§. 154.), und ihre Flächeninhalte sich wie die Quadrate der Halbmesser verhalten (§. 187.), so wird man auch haben

$$\text{Umkr. ADB} : \text{Umkr. A'D'B'} = AC : A'C' = SC : SC' = SA : SA'$$

$$\text{Fläch. ADB} : \text{Fläch. A'D'B'} = \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2 = \overline{SC}^2 : \overline{SC'}^2 = \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2,$$

---

*) Man nennt einen geraden Kegel einen solchen, wie wir jetzt beschrieben haben, zum Unterschiede von dem gegen seine kreisförmige Basis schief fallenden Kegel, welcher erzeugt wird, wenn man um den Punct S Fig. 130. eine gerade SA dergestallt herum bewegen läßt, daß sie immer den Umkreis eines in einer Ebne, welche nicht durch den Punct S geht, liegenden Kreises ADB berührt. Die Gerade SC, welche wir noch immer die Axe des Kegels nennen, ist nicht auf der Ebne der Basis ADB senkrecht.

welche Eigenschaften auf die zurückkommen, welche wir bey den Pyramiden gezeigt haben (239.).

§. 267. Anmerkung.

Wenn man die Dimensionen eines der Basis des Kegels parallelen Streifens desselben kennt, so kann man nach einem analogen Verfahren wie im §. 238. die Höhe des ganzen Kegels finden. Denn die ähnlichen Dreyecke ASO und A′S′O′ geben

$$AO : A'O' = SO : SO',$$

woraus man zieht

$$AO - A'O' : SO - S'O' = AO : SO$$

oder

$$AO - A'O' : OO' = AO : SO,$$

eine Proportion, in welcher die drey ersten Glieder bekannt sind, und aus welcher man folglich die Höhe des ganzen Kegels finden kann.

§. 268. Lehrsatz.

Wenn man auf der Basis des Kegels eingeschriebene und umschriebene Polygone beschreibt, und die Winkel dieser Polygone mit dem Scheitel des Kegels verbindet, so werden diese Linien Pyramiden bestimmen, welche reguläre heißen, weil alle ihre dreyeckige Seitenflächen gleich sind; und unter diesen Pyramiden kann man zwey, eine eingeschriebene und eine umschriebene, von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz ihrer Oberflächen kleiner als jede gegebene Größe ist, so klein auch diese Größe seyn mag.

Beweis.

Es sey abcdef Fig. 131. das in der Basis des Ke-

gels eingeschriebene Polygon; zieht man die Geraden aS, bS, cS ꝛc. und verbindet diese Geraden durch Ebnen, so wird man die Pyramide Sabcdef erhalten. Die Oberfläche dieser Pyramide, mit Ausschluß der Basis abcdef, ist aus den Dreyecken aSb, bSc, cSd ꝛc. zusammen gesetzt, welche einander gleich sind, weil sie aus den Seiten des regulären Polygons, und aus den schiefen Linien Sa, Sb, Sc ꝛc. gebildet sind, welche von der senkrechten SO gleichen Abstand haben. Der Flächeninhalt eines dieser Dreyecke, des Dreyecks aSb zum Beyspiel, hat zum Maaße $\frac{1}{2}\overline{ab} \times \overline{Sg}$, wo Sg auf ab senkrecht ist; ihre Summe wird also zum Maaße haben $\frac{1}{2}N \times \overline{ab} \times \overline{Sg}$, wenn man durch N die Anzahl der Seiten des Polygons abcdef bezeichnet; und da $N \times \overline{ab}$ offenbar der Umfang dieses Polygons ist, so kann man daraus schließen, daß die Oberfläche einer regulären Pyramide, mit Ausschluß der Basis, zum Maaße hat, das halbe Product aus dem Umfange der Basis, in die vom Scheitel auf eine ihrer Seiten gefällte senkrechte.

In der umschriebenen Pyramide, von der wir, um die Figur nicht zu verwickelt zu erhalten, nur eine einzige Seitenfläche dargestellt haben, sind alle Seitenflächen, so wie bey der eingeschriebenen Pyramide, einander gleich, weil die Gränzen SA, SB schiefe Linien sind, welche von der senkrechten SO gleichen Abstand haben. Da die Mitte der Seite AB des umschriebenen Polygons genau der Berührungspunct mit dem Umkreise des Zirkels aGbf ist, so wird die vom Puncte S auf AB gefällte

senk-

senkrechte, mit der Seite des Kegels zusammen fallen. Der Flächeninhalt des Dreyecks ASB hat zum Ausdruck $\frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{SG}$, und folglich wird die der ganzen Pyramide mit Ausschluß der Basis $\frac{1}{2}N \times \overline{AB} \times \overline{SG}$ seyn.

Dieses vorausgesetzt, so erhält man, wenn man die Oberfläche der eingeschriebenen und der umschriebenen Pyramide durch p und P, und den Umfang ihrer Grundflächen durch p′ und P′ bezeichnet,

$$p = \frac{1}{2}p' \times \overline{SG}, \quad P = \frac{1}{2}P' \times \overline{SG},$$

woraus folgt

$$P - p = \frac{1}{2}P' \times \overline{SG} - \frac{1}{2}p' \times \overline{Sg}.$$

Aber aus der Natur der im Kreise eingeschriebenen und umschriebenen Polygone folgt (§. 151.), daß die Umkreise dieser Polygone sich desto mehr der Gleichheit nähern, je mehr man ihre Seiten vervielfältigt; und es ist klar, daß unter diesen Umständen die Differenz der Geraden SG und Sg so klein als man will werden kann; die Producte $\frac{1}{2}P \times \overline{SG}$, und $\frac{1}{2}p' \times \overline{Sg}$ werden sich also ebenfalls unaufhörlich der Gleichheit nähern, und die Differenz der Oberflächen der eingeschriebenen und der umschriebenen Pyramide kann folglich kleiner als jede gegebene Größe werden.

§. 269. Zusatz.

Es ist klar, daß die eingeschriebenen und umschriebenen Pyramiden sich desto mehr dem Zusammenfallen mit dem Kegel nähern, je mehr man die Seiten der eingeschriebenen und der umschriebenen Polygone vervielfältigt, und um desto mehr nimmt die Oberfläche der

eingeschriebenen Pyramide zu, da indessen die der umschriebenen abnimmt. Denn der Umfang des eingeschriebenen Polygons nimmt immer so wie die senkrechte Sg, welche, indem sie sich der Kegelfläche nähern, sich immer mehr von der senkrechten SO entfernen, da hingegen der Umkreis des umschriebenen Polygons immer mehr abnimmt, je mehr er sich dem Kreise nähert, und die Gerade SO dieselbe Größe beybehält. Hieraus folgt offenbar, daß die Kegelfläche immer zwischen der einen eingeschriebenen und einer umschriebenen Pyramide liegt; da man nun nach dem vorhergehenden Lehrsatz die Differenz dieser letztern kleiner als jede gegebene Größe machen kann, so klein diese auch sey, so kann man um desto mehr die Differenz zwischen der Kegelfläche und der der eingeschriebenen oder der umschriebenen Pyramide kleiner als man will machen.

§. 270. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines geraden Kegels hat zum Maaße das halbe Product aus dem Umkreise des als Basis dienenden Zirkels, in seine Seite, oder $\frac{1}{2}$CR, wenn man den ersten durch C und die andere durch R bezeichnet.

Beweis.

Wenn P den Umfang des umschriebenen Polygons bezeichnet, so wird die Oberfläche der umschriebenen Pyramide durch $\frac{1}{2}$PR ausgedrückt seyn (§. 268.), weil R mit SG einerley ist; und bezeichnet man durch X das wahre Maaß der Oberfläche des Kegels, so werden die drey Größen $\frac{1}{2}$PR, $\frac{1}{2}$CR und X von dem Falle des §.

185. seyn, weil die erste vermöge des §. 269. immer größer als die beyden andern ist, und weil $P > C$ sich derselben um so viel als man will nähern kann; man wird also haben

$$X = \tfrac{1}{2}CR \text{ *).}$$

§. 271. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt des Theils der conischen Fläche, welcher übrig bleibt, nachdem man einen Theil S'A'D'B' durch eine zur Basis parallele Ebne hinweg genommen, oder der Oberfläche des conischen Streifens ADBE, A'D'B'E' Fig. 132., hat zum Maaße das halbe Product aus der Summe der Umkreise beyder Grundflächen ADB und A'D'B' in dessen Seite AA'.

Beweis.

Wenn man durch den Punct A senkrecht auf SA die Gerade AC errichtet, welche an Länge dem Umkreise ADBE gleich ist, und SC zieht, so ist die Fläche des rechtwinklichten Dreyecks SAC, welches $\frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{SA}$ zu seinem Maaße hat, der Oberfläche des Kegels SADBE gleich (vorherg. §.). Zieht man dann die Gerade A'C'

---

*) Dieser Satz könnte durch ein ähnliches Raisonnement, wie in der Anmerkung zu §. 186. unmittelbar bewiesen werden, wenn man statt der in dieser Anmerkung gebrauchten Polygone Pyramiden substituirt. Die Leser werden leicht finden, auf welche Art sie dieses Raisonnement modificiren müssen, um es auf die Sätze der §. 274, 279, 282, 296 und 303 anzuwenden, welche die Ausmessung des Volumens der runden Körper vollenden.

der AC parallel, so werden die einander ähnlichen Dreyecke SAC und S′A′C′ geben

$$AC : A'C' = SA : SA';$$

man hat aber auch

$$\text{Umkr. } ADBE : \text{Umkr. } B'D'B'E' = SA : SA' \text{ (§. 266.)};$$

das beyden Proportionen gemeinschaftliche Verhältniß SA : SA′ führt auf folgende:

$$\text{Umkr. } ADBE : \text{Umkr. } A'D'B'E' = AC : A'C';$$

und da nach der Construction $AC = \text{Umkr. } ADBE$, so folgt

$$\text{Umkr. } A'D'B'E' = A'C'.$$

Hieraus folgt, daß der Flächeninhalt des Dreyecks S′A′C′, welcher $\frac{1}{2}\,\overline{A'C'} \times \overline{SA'}$ gleich ist, dem des abgezogenen Kegels S′A′D′B′E′ gleich seyn wird; der Flächeninhalt des Trapeziums ACC′A′ wird also dem des conischen Streifens ADBE, A′D′B′E′ gleich seyn; und da die Gerade AA′ auf den Geraden AC und A′C′ senkrecht ist, so wird das Maaß des Trapeziums ACC′A′ seyn

$$\tfrac{1}{2}AA'\,(AC + A'C') \text{ (§. 175.)},$$

oder

$$\tfrac{1}{2}AA'\,(\text{Umkr. } ADBE + \text{Umkr. } A'D'B'E'),$$

wie nach dem Vortrage des Satzes.

Da man anstatt $\frac{1}{2}(AC + A'C')$, die durch die Mitte von AA′ der AC parallel geführte A″C″ nehmen kann (§. 175.), so folgt, daß man auch anstatt $\frac{1}{2}$ (Umkr. ADBE + Umkr. A′D′B′E′) den Umkreis A″D″B″E″ des in conischen Streifen in gleicher Entfernung von beyden Grundflächen und denselben parallel gemachten

Schnitts substituiren kann; denn man wird diese Reihe gleicher Verhältnisse haben

$$AC : A''C'' = SA : SA''$$
$$= \text{Umkr. } ADBE : \text{Umkr. } A''D''B''E'',$$

nach welcher die Gleichheit des Umkreises ADBE und der AC die des Umkreises A''D''B''E'' mit der A''C'' mit sich führt.

Man kann hieraus schließen, daß die convexe Fläche eines Kegelstreifens, oder eines abgekürzten Regels, zum Maaße hat $\overline{AA'} \times$ Umkr. A''D''B''E'', oder das Product aus seiner Seite in den Umkreis des in gleicher Entfernung von beyden Grundflächen gemachten Schnitts.

§. 272. Lehrsatz.

Wenn man die Seiten des eingeschriebenen und des umschriebenen Polygons hinlänglich vermehrt, so kann man immer zwey Pyramiden, eine eingeschriebene und eine umschriebene, von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz ihrer Volumen kleiner als jede gegebene Größe wird, so klein diese auch seyn mag.

Beweis.

Da die eingeschriebenen und umschriebenen Pyramiden einerley Höhe SO Fig. 131. haben, so erhält man, wenn die Volumen dieser Pyramiden durch p und P und die Flächeninhalte der ihnen als Grundflächen dienenden Polygone abcdef, ABCDEF durch p' und P' bezeichnet werden

$$p = \tfrac{1}{3}p' \times \overline{SO}, \quad P = \tfrac{1}{3}p' \times \overline{SO},$$

welches giebt

$$P - p = \tfrac{1}{3}\overline{SO} \times (P' - p');$$

und da man die Differenz $P' - p'$ zwischen der Fläche des eingeschriebenen und des umschriebenen Polygons, so klein als man will werden kann (§. 183.), so kann man auch die Differenz $P - p$ der Volumen der eingeschriebenen und der umschriebenen Pyramide, so klein als man will machen.

§. 273. Zusatz.

Da das Volumen des Kegels offenbar zwischen dem der eingeschriebenen und dem der umschriebenen Pyramide liegt, so folgt aus dem vorhergehenden Lehrsatze, daß man immer eine eingeschriebene und eine umschriebene Pyramide angeben kann, welche davon um so wenig als man will unterschieden ist.

§. 274. Lehrsatz.

Das Volumen eines Kegels hat zum Maaße den dritten Theil des Products aus der Fläche der Basis in die Höhe, oder $\frac{1}{3}CH$, wenn man die erste durch C und die zweyte durch H bezeichnet.

Beweis.

Es sey P der Flächeninhalt des als Basis der eingeschriebenen Pyramide dienenden Polygons, dessen Volumen folglich $\frac{1}{3}PH$ zum Maaße haben wird, und X das wahre Maaß des Volumens des Kegels; die drey Größen $\frac{1}{3}PH$, $\frac{1}{3}CH$ und X sind also vom Falle des §. 185, weil P immer C übertrifft, und nach dem vorhergehenden §. die Größe $\frac{1}{3}PH$, obgleich immer größer

als die beyden andern, doch denselben so nahe als man will kommen kann; man wird also haben $X = \frac{1}{3}CH$ *).

§. 275. Aufgabe.

Das Volumen eines abgekürzten geraden Kegels zu finden.

Auflösung.

Man muß die Seiten AA′ und BB′ Fig. 132. verlängern, bis sie einander schneiden, um die Höhe SO des ganzen Kegels zu finden (§. 267.); hierdurch erhält man für das Volumen des ganzen Kegels $\frac{1}{3}\overline{SO} \times \overline{ADBE}$; und zieht man von SO die Höhe OO′ des conischen Streifens, oder des abgekürzten Kegels ab, so wird der Rest SO′ die Höhe des abgeschnittenen Kegels seyn, dessen Volumen folglich $\frac{1}{3}\overline{SO'} \times \overline{A'D'B'E'}$ ist. Die Differenz zwischen diesem Product und dem vorhergehenden wird das Volumen des abgekürzten Kegels seyn.

§. 276.

Wenn man sich vorstellt, daß sich das Rechteck ACC′A′ Fig. 133. um eine seiner Seiten CC′ dreht, so wird es den Körper erzeugen, welchen man den geraden

---

*) Der obige Satz ist auch beym schiefen Kegel richtig; denn der Lehrsatz des §. 272. und der Zusatz des §. 273. setzen keinesweges voraus, daß die senkrechte SO auf den Mittelpunct des Kreises aGbf fällt, und können folglich für den schiefen Kegel Fig. 130. gelten. Eben so verhält sich bey der Untersuchung des Volumens des abgekürzten Kegels, welche im folgenden §. abgehandelt wird.

Cylinder nennt; die gerade AA′ beschreibt bey dieser Bewegung die cylindrische Oberfläche.

Jeder Punct A″ dieser Geraden beschreibt den Umkreis eines Zirkels A″D″B″, welcher dem durch AC erzeugten Kreis ADB, den man die Basis des Cylinders nennt, gleich und parallel ist; denn die auf CC′ senkrechte Gerade A″C″, welche der AC gleich ist, beschreibt während der Umdrehung um CC′ eine der Ebne ADB parallele Ebne, deren Durchschnitt mit der cylindrischen Oberfläche A″D″B″ seyn wird. Hieraus folgt, daß der Durchschnitt einer geraden cylindrischen Fläche, durch eine ihrer Basis parallele Ebne, ein dieser Basis gleicher Kreis ist.

Der Cylinder wird oberhalb durch eine Basis A′D′B′ begränzt, welche der untern Basis ADB gleich und parallel ist. Die Gerade CC′, um welche sich das Parallelogramm ACC′A dreht, und welche offenbar die Mittelpuncte beyder Grundflächen, so wie aller ihnen parallelen Schnitte enthält, heißt die Axe des Cylinders, und ist auf der Basis senkrecht *).

---

*) Der schiefe Cylinder ist der, welcher erzeugt wird, wenn irgend eine Gerade AA′ Fig. 134. unterworfen ist, sich zu sich selbst parallel, längs dem Umkreise eines Zirkels ADB zu bewegen. Denkt man sich die erzeugende Gerade AA′ in irgend eine Lage DD′ angelangt, zieht man ferner durch den Mittelpunct der Basis der AA′ die gleiche und parallele CC′, und begränzt den Körper durch eine der ADB parallele Ebne A′D′B′, so bildet man, indem man C′D′ zieht, das Parallelogramm DCC′D′, und man wird haben C′D = CD. Die obere Fläche A′D′C′ des schiefen Cylinders wird also so wie

§. 277. Lehrsatz.

Wenn man im Kreise, welcher zur Basis des Cylinders dient, Polygone von einerley Anzahl Seiten eingeschrieben und umschrieben denkt, wenn man ferner aus den Winkeln dieser Polygone zur Axe OO′ Fig. 135. parallele gerade Linien führt, und ihre obern Puncte durch andre Gerade verbindet, so wird man zwey Prismen, ein in dem vorgelegten Cylinder eingeschriebenes, und ein um denselben beschriebenes finden; und man kann immer diese Prismen dergestalt wählen, daß die Differenz ihrer Oberflächen kleiner als jede gegebene noch so kleine Größe wird.

Beweis.

Die Geraden aa′, bb′, welche der OO′ parallel geführt, und folglich auf der Ebne abcdef senkrecht sind, werden in der cylindrischen Fläche liegen, weil die Rechtecke aOO′a, bOO′b′ dem erzeugenden Rechtecke gleich sind. Es ist ferner klar, daß die Rechtecke abb′a′, bcc′b′ ꝛc. einander gleich sind, weil sie offenbar zwey Winkel und drey Seiten gleich haben (§. 83.). Da die Gränzen aa′, bb′ ꝛc. auf ab, bc ꝛc. senkrecht sind, so wird der Flächeninhalt eines jeden dieser Recktecke durch $\overline{ab} \times \overline{aa'}$, $\overline{bc} \times \overline{bb'}$ ꝛc. ausgedrückt seyn; nimmt man diese Producte zusammen, mit Erwägung dessen, daß sie alle einen gemeinschaftlichen Factor haben, weil

---

die untere Basis ein Kreis seyn, eben so wie alle ihre parallele Schnitte; aber die Axe CC′ wird nicht, wie beym geraden Kegel, auf derselben senkrecht seyn.

$aa' = bb'$ ꝛc., so wird die Oberfläche des eingeschriebenen Prisma, mit Ausschluß der Grundflächen abcdef, $a'b'c'd'e'f'$, durch $(ab + bc + cd + de + ef) \times aa'$ oder durch $p \times H$ ausgedrückt werden können, wenn p den Perimeter des Polygons abcdef, und H die dem Prisma und Cylinder gemeinschaftliche Höhe aa' ausdrückt.

Um Verwirrung zu vermeiden, haben wir nur eine einzige Seitenfläche $ABB'A'$ des umschriebenen Prisma dargestellt. Es ist offenbar, daß wenn man in dieser Fläche, und durch den Punct G, in welchem die Seite AB den Kreis berührt, GG' der OO' parallel führt, diese Gerade auf der cylindrischen Fläche seyn wird, weil das Rechteck $GOO'G'$ dem erzeugenden Rechteck gleich ist. Da nun der Flächeninhalt des Rechtecks $ABB'A'$ durch $\overline{AB} \times \overline{GG'}$ ausgedrückt ist, so wird offenbar die Oberfläche des ganzen Prisma, mit Ausschluß der Grundflächen, dem Umfange P des umschriebenen Polygons, multiplicirt durch die Höhe GG oder H gleich seyn, welche allen Parallelogrammen, die den Umfang des eingeschriebenen und des umschriebenen Prisma bilden, gemein ist.

Dieses vorausgesetzt, wird die Differenz der convexen Fläche des eingeschriebenen und des umschriebenen Prisma $P \times H - p \times H = (P - p)H$ seyn, und folglich so klein als man will werden können, wenn man solche eingeschriebene und umschriebene Polygone wählt, daß ihre Perimeter P und p um eine so kleine Größe als man will von einander unterschieden sind.

§. 278. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze und aus den im §. 269. schon angegebenen Gründen folgt, daß die cylindrische Fläche kleiner als die des umschriebenen und größer als die des eingeschriebenen Prisma ist, und man folglich ein eingeschriebenes oder umschriebenes Prisma finden kann, dessen Fläche um so wenig als man will von der geraden cylindrischen Fläche unterschieden ist.

§. 279. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt der geraden cylindrischen Oberfläche hat zum Maaß das Product aus dem Umfange ihrer Basis in die Höhe H oder CH.

Beweis.

Wenn man den Umfang des als Basis des um den Cylinder beschriebenen Prisma dienenden Polygons durch P bezeichnet, und durch X das wahre Maaß dieses letztern, so wird man PH für die Oberfläche des umschriebenen Prisma erhalten, und die drey Größen PH, CH und X werden offenbar von dem Fall des §. 185. seyn. Man wird also haben $X = CH$

§. 280. Lehrsatz.

Es lassen sich immer zwey Prisma ein um den Cylinder beschriebenes, und ein in demselben eingeschriebenes von der Beschaffenheit finden, daß ihre Volumen um so wenig als man will von einander verschieden seyn können.

Beweis.

Das Volumen des eingeschriebenen Prisma

abcdefa′b′c′d′e′f′ ist gleich $\overline{\text{abcdef}} \times H$ (§. 259.); und bezeichnet man die Fläche des eingeschriebenen Polygons durch p, die des eingeschriebenen durch P, so wird das Volumen des eingeschriebenen Prisma durch pH und das des umschriebenen durch PH gemessen werden; ihre Differenz, welche $(P - p)H$ ist, kann so klein als man will werden, weil die Differenz $P - p$ zwischen dem Flächeninhalt des eingeschriebenen, und dem des umschriebenen Polygons, kleiner als jede gegebene, noch so kleine Größe werden kann.

§. 281. Zusatz.

Hieraus folgt, daß man ein eingeschriebenes und ein umschriebenes Prisma von der Beschaffenheit construiren kann, daß ihre Volumen um so wenig als man will von dem des Cylinders unterschieden sind, welcher überdieß immer größer als das erste, und kleiner als das andre ist.

§. 282. Lehrsatz.

Das Volumen eines geraden Cylinders hat zum Maaße das Product aus seiner Grundfläche in die Höhe, oder $C'H$, wo C' der Flächeninhalt des Kreises aGbf ist.

Beweis.

Wenn man den Flächeninhalt des umschriebenen Polygons durch P' bezeichnet, so wird $P'H$ das Volumen des umschriebenen Prisma seyn; und wenn X das wahre Maaß des Cylinders bezeichnet, so werden die drey Größen $P'H$, $C'H$ und X von dem Falle des

§. 185. seyn, und man wird nothwendigerweise haben $X = C'H$ *).

§. 283.

Wenn sich der Halbkreis ACB um seinen Durchmesser AB Fig. 136. dreht, so erzeugt er die Kugel, und sein halber Umfang die Kugelfläche.

Bey dieser Bewegung beschreibt jeder Punct des Bogens ACB offenbar den Umkreis eines Zirkels, welcher die auf den Durchmesser AB, welchen man die Axe nennt, gefällte senkrechte DE zum Halbmesser hat. Jedoch sind von dieser Bemerkung die äußersten Puncte A und B der Axe ausgenommen, welche man Pole nennt, und welche so wie alle Puncte des Durchmessers unbeweglich bleiben.

Die Kugelfläche hat alle ihre Puncte vom Puncte O, dem Mittelpuncte des erzeugenden Kreises, gleich weit entfernt; denn da dieser Punct auf der Ebne des Halbkreises ACB bey allen Lagen, die er angenommen hat, immer auf demselben einerley Lage beybehalten hat, so hat auch seine Entfernung von jedem der Puncte des Bogens ACB, welche successiv durch alle Puncte der Kugel gegangen sind, keine Veränderung erlitten.

Hieraus folgt, daß der Halbmesser des Kreises ACB zugleich der der Kugel ist.

---

*) Der obige Satz ist auch beym schiefen Cylinder richtig; denn es ist leicht einzusehen, daß der vorhergehende Lehrsatz und Zusatz nicht voraussetzen, daß die Axe des Cylinders und die Gränzen der Prismen auf der Ebne der Basis senkrecht sind.

§. 284. Lehrsatz.

Der Durchschnitt einer Kugel durch irgend eine Ebne ist immer ein Kreis.

Beweis.

Der Satz ist für sich klar, wenn die schneidende Ebne durch den Mittelpunct der Kugel geht, und alsdann hat der Umkreis dieses Schnitts mit der Kugel einerley Halbmesser.

Wenn aber DGFH irgend eine Ebne bezeichnet, und man fällt vom Mittelpuncte O auf diese Ebne die senkrechte OE, so wird der Endpunct E dieser senkrechten von allen Puncten des Durchschnitts DGFH gleiche Entfernung haben; denn alle schiefe Linien OD, OG, OF, OH, welche als Halbmesser der Kugel gleich sind, werden von OE gleiche Entfernung haben (§. 199.). Die Curve DGFH wird also ein Kreis seyn, dessen Mittelpunct in E, und deren Halbmesser DE ist.

§. 285. Anmerkung.

Da die Gerade DE nothwendigerweise kleiner als der Halbmesser OD ist, so wird der Kreis DGFH kleiner als der seyn, welcher aus einem durch den Mittelpunct der Kugel gemachten Schnitt erfolgen würde; dieser letztere ist ein größter Kreis, indeß jeder andre ein kleinerer ist.

Da alle größte Kreise gleiche Halbmesser haben, so sind sie einander gleich.

§. 286. Zusatz.

Zwey größte Kreise, ACBF, AIBK, theilen ein-

ander in zwey gleiche Theile; denn sie können einander offenbar nur in der Geraden AB, dem gemeinschaftlichen Durchschnitt beyder Ebnen, schneiden, welche, da sie durch den gemeinschaftlichen Mittelpunct geht, zugleich ein Durchmesser beyder Kreise ist, und sie folglich in zwey gleiche Theile theilt.

§. 287.

Drey Kreise, von denen je zwey und zwey einander auf der Kugelfläche schneiden, bilden ein sphärisches Dreyeck; man betrachtet aber gewöhnlich nur das, welches von dreyen Bogen größter Kreise gebildet wird, deren jeder kleiner als der Halbkreis ICM ist.

Wenn man vom Mittelpuncte der Kugel nach den Puncten C, I und M Halbmesser zieht, so werden diese Halbmesser offenbar ein körperliches Dreyeck OCIM bestimmen, dessen ebne Winkel IOC, IOM, MOC von den Bogen CI, IM und CM gemessen werden.

§. 288. Lehrsatz.

Die Summe zweyer Seiten eines sphärischen Dreyecks ist immer größer als die dritte.

Beweis.

Da vermöge §. 221. die Summe irgend zweyer der ebnen Winkel IOC, IOM, MOC, welche das körperliche Dreyeck OCIM bilden, größer als der dritte ist, und die Bogen CI, IM und CM, welche diese Winkel messen, einerley Halbmesser haben, so folgt nothwendigerweise, daß die Summe irgend zweyer dieser Bogen, welche das Maaß der Summe der Winkel seyn würde,

mit denen sie correspondiren (§. 110.) den dritten übertreffen muß.

§. 289. Erster Zusatz.

Hieraus folgt, daß der kürzeste Weg, um auf der Kugelfläche von einem Puncte zum andern zu kommen, der Bogen des größten Kreises ist, welcher von der durch diese beyden Puncte und den Mittelpunct der Kugel gelegten Ebne bestimmt wird; denn nähme man für die kürzeste Entfernung der Puncte A und B Fig. 137. eine vom größten Kreise AB verschiedene Linie AMNB an, welche ebenfalls durch diese Puncte geht, so würde man erhalten, wenn man auf dieser Linie einen Punct M nähme, und die größten Kreise AM und MB zöge,

$$AM + MB > AB \text{ (vorherg. §.)}.$$

Nimmt man zwischen M und B einen Punct N, und führt die größten Kreise MN und NB, so würde man ferner haben

$$MN + NB > MB,$$

und folglich

$$AM + MN + NB > AM + MB.$$

Fährt man auf diese Art fort, so wird man leicht finden, daß der von A bis B zu durchlaufende Weg desto mehr zunimmt, je mehr man sich der Linie AMNB nähert; woraus offenbar wird, daß AB der kürzeste ist; und man kann keinen andern finden, weil man durch irgend zwey Puncte der AB nur einen einzigen größten Kreis legen kann, weil man durch diese Puncte und den Mittelpunct der Kugel nur eine einzige Ebne legen kann.

Wir

Wir haben die Linie AMNB außerhalb aller durch rgend zwey ihrer Puncte geführten größten Kreise an- genommen; wenn das Gegentheil statt fände, wie in em punctirten Theil MN'A zu sehen ist, so könnte man ie größten Kreise MN' und AN' ziehen, und da man ann haben würde

$$AN' + MN' > AM,$$

o würde ferner daraus folgen

$$AN' + MN' + MN + NB > AM + MB > AB.$$

§. 290. Zweyter Zusatz.

Aus eben diesem Satze folgt ferner, daß die Sum- ne der Seiten eines sphärischen Dreyecks kleiner als er Umfang eines größten Kreises ist; denn wenn man ie Seiten AI und AM des Dreyecks MAI Fig. 136. erlängert, bis sie einander in B schneiden, so wird man haben

$$IM < BM + BI \text{ (§. 288.)};$$

etzt man beyderseits AM + AI hinzu, so kommt

$$AM + AI + IM < BM + BI + AM + AI;$$

nun bilden AM und BM den Halbkreis ACB, so wie AI und BI den Halbkreis AIB zusammen setzen, wel- cher dem ersten gleich ist (§. 285.); ihre Summe wird also einen ganzen Umkreis zusammen setzen, welcher die Seiten des Dreyecks MAI übertreffen wird.

Es ist leicht einzusehen, daß dieser Satz auch aus den §. 225 und 287. folgt.

§. 291. Lehrsatz.

Wenn man aus dem Mittelpuncte irgend eines auf der Kugelfläche gezogenen Kreises DGFH eine senkrechte

AE errichtet, so wird sie durch den Mittelpunct der Kugel gehen, und sie in zweyen Puncten, A und B, schneiden, deren jeder von allen Puncten des Umkreises DGFH gleiche Entfernung haben wird.

Beweis.

Es ist aus §. 199. klar, daß die senkrechte AE durch eine Reihe Puncte von der Beschaffenheit gehen muß, daß jeder derselben vom Umkreise DGFH, welcher aus dem Puncte E der senkrechten, als aus einem Mittelpuncte, beschrieben ist, gleiche Entfernung haben; da nun der Punct O, als Mittelpunct der Kugel, diese Eigenschaft hat, so wird er sich auf AE befinden, und jeder der Puncte A und B, in welchen AE die Kugel trift, müssen von jedem Puncte des Umkreises DGFH gleiche Entfernung haben; es ist aber die Entfernung dieser letztern vom Puncte A nur dann ihrer Entfernung vom Puncte B gleich, wenn der Punct E in O fällt, oder wenn es einen größten Kreis CILK betrift.

Es ist offenbar, daß die Bogen AD, AG, AF, AH, welche auf größten Kreisen genommen, die nothwendigerweise einander gleich sind, und welche die Entfernungen des Punctes A von jedem der Puncte des Umkreises DGFH zu Sehnen haben, einander gleich sind.

§. 292. Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Puncte A und B dienen können, den Kreis DGFH zu beschreiben, ohne daß es erst nöthig sey, seinen Mittelpunct zu kennen, welcher innerhalb der Kugel liegt; denn man braucht nur alle Puncte zu merken, deren Entfernungen

vom Puncte A oder vom Puncte B auf der Kugelfläche durch die Bogen größter Kreise AD und AG, oder BD und BG gemessen, derjenigen gleich sind, welche man zur Beschreibung des vorgelegten Kreises gewählt hat.

Diese Puncte A und B sollen in der Folge die Pole des Kreises DGFH, und die Gerade AE dessen Axe genannt werden.

§. 293. Lehrsatz.

Eine jede durch einen Punct der Kugelfläche auf den durch diesen Punct gehenden Halbmesser senkrecht geführte Ebne, ist eine Tangente der Kugel; und umgekehrt ist jede Ebne, welche die Kugelfläche in irgend einem Puncte berührt, auf dem durch diesen Punct gehenden Halbmesser senkrecht.

Beweis.

Da die Ebne AB Fig. 138. auf dem Halbmesser OC im Puncte C senkrecht steht, so sind alle andre Puncte derselben vom Mittelpunct O weiter als der Punct C entfernt, weil alle schiefe Linien OD, OE ꝛc. größer als die senkrechte OC sind; es liegen also die Puncte D, E ꝛc. außerhalb der Kugel, und die Ebne AB, welche nur den einzigen Punct C mit dieser Kugelfläche gemein hat, ist eine Tangente.

Umgekehrt kann die die Kugel in C berührende Ebne, nur die auf dem Halbmesser OC senkrechte Ebne AB seyn; denn da diese Ebne nur den Berührungspunct C mit der Kugel gemein, und alle andre Puncte vom Mittelpuncte weiter als diesen entfernt hat, so folgt daß der Halbmesser OC die kürzeste Linie ist, welche man

vom Mittelpuncte nach der berührenden Ebne ziehen kann, und daß sie folglich auf dieser Ebne senkrecht ist.

§. 294. Lehrsatz.

Wenn man in irgend einem Kreisbogen ad des Halbkreises adp, Fig. 139., zwey Theile regulärer Polygone abcd und ABCD einschreibt und umschreibt, und den Halbkreis um den Durchmesser ap mit den Theilen der Polygone herumbewegen läßt, so wird es immer möglich seyn, die Differenz zwischen der Oberfläche des durch den eingeschriebenen Theil erzeugten Körpers, und der des durch den umschriebenen Theil erzeugten, kleiner als jede gegebene Größe zu machen.

Beweis.

Wenn man von den äußersten Puncten d und c, und durch die Mitte l irgend einer Seite cd auf ap die senkrechten dg, cf und lq fällt; dann durch den Punct l die Gerade lO zieht, und endlich cr senkrecht auf dg errichtet, so werden die Dreyecke dcr und qlO ähnlich seyn, weil die Seiten des einen auf denen des andern senkrecht sind (§. 65.), und also geben

$$cd : cr = lO : lq.$$

Da aber die Umkreise der Zirkel sich wie ihre Halbmesser zu einander verhalten, so kann man statt des Verhältnisses lO zu lq, das der Umkreise substituiren, von denen diese Linien Halbmesser sind, und man wird haben

$$cd : cr = \text{Umkr. } lO : \text{Umkr. } lq,$$

woraus folgt

$$\overline{cd} \times \text{Umkr. } lq = \overline{cr} \times \text{Umkr. } lO.$$

Erinnert man sich des Maaßes der Oberfläche des abgekürzten Kegels (§. 271.), so wird man leicht einsehen, daß weil lq durch die Mitte von cd geht, das Product $\overline{cd} \times$ Umkr. lq der Ausdruck für die Oberfläche des abgekürzten Kegels ist, welchen das Trapez fcdg, indem es sich um die Axe fg dreht, beschreiben würde; die Oberfläche dieses Körpers wird also nach dem Vorhergehenden auch zum Maaße haben $\overline{cr} \times$ Umkr. lO; das heißt, das Product aus seiner Höhe in den Umkreis des in dem Polygon, von welchem seine Seite einen Theil ausmacht, eingeschriebenen Kreises. Es ist offenbar, daß dieselbe Construction, bey den durch die übrigen Seiten cb, ba beschriebenen Flächen, auf dasselbe Resultat führen würde, und daß jede dieser Flächen gleich ist dem Theil der Axe ap, welcher zwischen den von den äußersten Puncten der sie beschreibenden Seite herabgelassenen senkrechten liegt, multiplicirt durch den Umkreis des eingeschriebenen Kreises. Ihre Summe, welche die Fläche des durch den Theil abcd des eingeschriebenen Polygons, erzeugten Körpers, zusammen setzt, wird also gleich seyn, der Summe der Linien gf, fe, ae, d. i. dem Theil ag der Axe, welcher zwischen dem äußersten Punct a der ersten Seite, und der vom äußersten Punct der letzten Seiten auf diese Axe gefällten senkrechten liegt, multiplicirt durch den Umkreis des eingeschriebenen Kreises, oder $\overline{ag} \times$ Umkr. lO.

Aus eben der Ursache wird die Oberfläche des durch den Theil ABCD des eingeschriebenen Polygons erzeug-

ten Körpers zum Ausdrucke haben $\overline{AG} \times$ Umkr. LO. Diese letztere Größe wird immer die erste übertreffen, erstlich weil Umkr. LO immer größer als Umkr. IO ist, und dann weil AG größer als ag ist. In der That hat man

$$AG = aG + Aa \text{ und } ag = aG + Gg,$$

woraus folgt

$$AG - ag = Aa - Gg;$$

aber das Dreyeck DOG giebt

$$Dd : Gg = dO : gO \text{ (§. 59.)};$$

da nun der Theil Dd gleich Aa ist, so zieht man hieraus

$$Gg = \overline{Aa} \times \frac{gO}{dO},$$

woraus folgt

$$AG - ag = Aa - \overline{Aa} \times \frac{gO}{dO}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß AG immer die ag übertrifft; denn da dO, als Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks dgO, immer größer als gO ist, so muß das Verhältniß $\frac{gO}{dO}$ nothwendigerweise ein Bruch seyn, welcher überdieß keine Veränderungen erleidet, weil der Punct d, als äußerste Gränze des Bogens ad, auch zugleich die Gränze aller Theile der eingeschriebenen Polygone ist, welche mit diesem Bogen correspondiren.

Dieses vorausgesetzt, so muß Umkr. LO desto weniger vom Umkr. IO unterschieden seyn, je mehr man die Anzahl der Seiten vervielfältigt; desto mehr aber nimmt die Differenz AG — ag ab, und es ist klar, daß diese Abnahmen so weit als man will getrieben werden

können; man kann also die Differenz $\overline{AG} \times$ Umkr. LO $-$ $\overline{ag} \times$ Umkr. IO kleiner als jede gegebene noch so kleine Größe machen, wenn man diese Differenz als die zweyer Rechtecke ansieht, deren Grundlinien und Höhen der Gleichheit so nahe als man will gebracht werden können.

§. 295. Zusatz.

Der Ausdruck $AG - ag = Aa - \overline{Aa} \times \frac{gO}{dO}$ zeigt auch, daß AG mit Aa zu gleicher Zeit abnimmt, weil ag unverändert bleibt; da nun LO ebenfalls unverändert bleibt, so folgt, daß die Oberfläche des mit dem Theil ABCD beschriebenen Körpers desto mehr abnimmt, je mehr er sich der Kugel nähert. Die unter eben diesen Umständen erfolgende Zunahme der IO beweist, daß die Oberfläche des von abcd beschriebenen Körpers alsdann zunimmt, und daß folglich die Oberfläche des mit dem Bogen aLd beschriebenen Theils der Kugel, kleiner als die des ersten dieser Körper, und größer als die des andern ist. Hieraus folgt, daß man zwey Körper dieser Art angeben kann, deren Oberfläche um so wenig als man will von der des mit dem Bogen aLd beschriebenen Theils der Kugel unterschieden ist.

§. 296. Lehrsatz.

Die Oberfläche des mit dem Bogen aLd correspondirenden Theils der Kugel, ist gleich dem Umkreise eines größten Zirkels, multiplicirt durch den Theil ag, welcher zwischen dem Anfangspunct a der Axe ap, und der

vom andern äußersten Punct des Bogens auf diese Axe gefällten senkrechten dg liegt, das heißt $\overline{ag} \times$ Umkr. LO.

Beweis.

Es sey X das wahre Maaß dieser Fläche; vergleicht man es mit dem des durch den Theil ABCD des umschriebenen Polygons erzeugten Körpers, so wird man diese drey Größen haben

$\overline{AG} \times$ Umkr. LO, $\overline{ag} \times$ Umkr. LO, und X;

da nun die erste immer größer als die beyden übrigen ist, denen sie so nahe als man will gebracht werden kann, so ergiebt sich hieraus §. 185.

$$X = ag \times \text{Umkr. LO},$$

§. 297. Zusatz.

Hieraus folgt, daß die Oberfläche der ganzen Kugel gleich ist, ihrem Durchmesser multiplicirt durch den Umkreis eines größten Kreises oder $ap \times$ Umkr LO, denn der vorhergehende Lehrsatz läßt sich auf den Quadranten aLm anwenden, und giebt für die Oberfläche der durch die Bewegung desselben um die Axe aO erzeugten Halbkugel $aO \times$ Umkr. OL; für den zweyten Quadranten pnm hat man ebenfalls $pO \times$ Umkr. LO; die Summe dieser Größe und der vorhergehenden ist

$(aO + pO)$ Umkr. LO $= ap \times$ Umkr. LO.

Ueberhaupt ist die Oberfläche des zwischen zweyen parallelen Ebnen enthaltenen Theils der Kugel oder die einer Zone, gleich der Höhe dieser Zone oder dem senkrechten Abstande der sie bestimmenden Ebnen, multiplicirt durch den Umkreis eines größten Kreises; denn wenn man

von dem durch den Bogen aLm beschriebenen Kugelabschnitt, dessen Oberfläche von aO × Umkr. LO gemessen wird, den von aLd beschriebenen Kugelabschnitt, dessen Oberfläche ag × Umkr. LO ist, abzieht, so wird man

$$(aO - ag)\ \text{Umkr. LO} = Og \times \text{Umkr. LO}$$

für die Oberfläche der vom Bogen dm beschriebenen Zone erhalten.

Auf eine analoge Art findet man, daß die vom Bogen mn beschriebene Zone durch Oo × Umkr. LO ausgedrückt seyn muß; und setzt man dieses Product zu Og × Umkr. LO hinzu, so hat man im Resultate (Oo + Og) Umkr. LO = og × Umkr. LO den Ausdruck für die vom Bogen dmn beschriebenen Zone, in welcher der Mittelpunct liegt.

§. 298. Zweyter Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt ferner, daß die Kugelfläche vier Mahl größer ist, als die ihres größten Kreises; denn die Fläche dieses letzteren ist durch $\frac{1}{2}$CR ausgedrückt, wenn man dessen Umkreis durch C und dessen Halbmesser durch R bezeichnet (§. 186.); bezeichnet man aber den Durchmesser durch D, so hat man $R = \frac{1}{2}D$, und folglich $\frac{1}{2}R = \frac{1}{4}D$, woraus man für die Fläche des größten Kreises $\frac{1}{4}$CD erhält, ein Resultat, welches wirklich nur der vierte Theil des Products CD ist, durch welches die Oberfläche der Kugel gemessen wird (vorhergehende §.).

§. 299. Lehrsatz.

Die Oberfläche des zwischen zweyen sich schneiden-

den größten Kreisen enthaltenen Theils ACBIA Fig. 136. verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie sich der zwischen diesen Kreisen liegende Bogen CI des auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der Ebnen BCA und BIA senkrechten Kreises CILK zu seinem Umkreise verhält, oder wie sich der ihren Flächenwinkel CABI messende ebne Winkel zu vier rechten verhält.

Beweis.

Der Satz ist evident, wenn der Bogen CI ein aliquoter Theil des Umkreises CILK ist; denn denkt man sich diesen Umkreis wirklich in seine aliquoten Theile zerlegt, und durch die Puncte A und B, so wie durch die Theilpuncte größte Kreise gelegt, so wird die Kugelfläche in so viele dem ACBI gleiche Theile zerlegt seyn, als der Kreis CILK Theile enthält, weil zwey dergleichen Theile offenbar einander gleich sind, wenn die Ebnen der sie bestimmenden Kreise respectiv einerley Flächenwinkel einschließen.

Wenn der Bogen CI kein aliquoter Theil des Umkreises ist, so kann man durch ein ähnliches Raisonnement wie im §. 109. beweisen, daß das Verhältniß des Theils ACBIA zur ganzen Kugelfläche weder kleiner noch größer als das des Bogens CI zum Umkreise CILK seyn kann.

Da die Ebne CLIK auf der Geraden AB senkrecht ist, so wird der ebne Winkel COI offenbar den Flächenwinkel CABI messen, und da das Verhältniß dieses Winkels zu vier rechten mit dem des ihn messenden Bogens CI zum Umkreise CILK einerley ist (§. 110.), so muß

sich nothwendigerweise der Winkel COI zu vier rechten verhalten, wie die Oberfläche des Theils ACBIA sich zu der der Kugel verhält.

§. 300. Lehrsatz.

Die Oberfläche eines sphärischen Dreyeckt verhält sich zu der der ganzen Kugel, wie sich die Differenz zwischen der Summe der von den dieses Dreyecks zusammensetzenden Kreisen gebildeten Flächenwinkel, und zweyen rechten sich zu acht rechten verhält.

Beweis.

Die drey das sphärische Dreyeck CIM bildenden Kreise ACBL, CILK und MIFK theilen die Kugelfläche in acht Dreyecke, von denen CKM und FIL gleich sind, wovon man sich überzeugen kann, wenn man in Erwägung zieht, daß die körperlichen Dreyecke OCKM und OFIL, denen sie correspondiren (§. 287.), alle ihre Theile einander gleich haben *). Dieses vorausgesetzt,

---

*) Die Gleichheit der Theile dieser körperlichen Dreyecke beweist die der Theile der sphärischen Dreyecke; es ist aber leicht einzusehen, daß die Seiten dieser Dreyecke nicht auf einerley Art aneinander gelegt sind, und daß sie folglich nicht auf einander anschließen werden.

Cavalleri, welchem man den obigen Satz verdankt (Directorium generale uranometricum, Bononiae 1632, pag. 316.), und die Schriftsteller, welche ihm gefolgt sind, haben die Gleichheit der sphärischen Dreyecke, deren Seiten stückweise gleich sind, als der der geradlinigten Dreyecke analog angesehen, ohne in Erwägung zu ziehen, daß man die Kugelfläche

wird, wenn die Oberfläche der Kugel durch S bezeichnet wird, und der rechte Winkel durch D, die Oberfläche des Theils ICKMI zum Ausdruck haben

$$S \times \frac{\text{Winkel CIKM}}{4D} \text{ (vorherg. §.);}$$

und da dieser Theil aus den Dreyecken CIM und CKM zusammengesetzt ist, so wird man haben

$$\text{CIM} + \text{CKM} = \frac{S \times \text{Wink. CIKM}}{4D};$$

da die Oberfläche des Theils MIFAM

$$\frac{S \times \text{Wink. IMFA}}{4D}$$

ist, so wird man finden

$$\text{CIM} + \text{CIF} = \frac{S \times \text{Wink. IMFA}}{4D};$$

endlich wird der Theil CILBC, dessen Oberfläche durch

---

nicht wie die Ebne umdrehen kann; aber im Grunde ist diese Schwierigkeit mehr scheinbar, und es giebt mehrere Methoden sich von der Gleichheit gedachter Dreyecke zu überzeugen. Hier ist ein Beweis davon.

Wenn man durch die Scheitel der Winkel eines jeden der vorgelegten Dreyecke einen Kreis legt, und durch dessen Pol den Winkeln der vorgelegten Dreyecke Bogen größter Kreise führt, so werden diese Bogen einander gleich seyn (§. 292.); man wird durch dieses Mittel auf jeder Seite der vergelegten Dreyecke ein gleichschenklichtes sphärisches bilden. Die drey gleichschenklichten Dreyecke des ersten der vorgelegten werden offenbar den dreyen des zweyten stückweise gleich seyn; und die Oberflächen der vorgelegten Dreyecke werden mit den der neuen Dreyecke auf einerley Art gebildet seyn.

$$\frac{S \times \text{Winkel ICLB}}{4D}$$

ausgedrückt ist, geben

$$\text{CIM} + \text{MIL} = \frac{S \times \text{Wink. ICLB}}{4D}.$$

Setzt man statt des Dreyecks CKM das ihm gleiche FIL, und nimmt diese Ausdrücke zusammen, mit Beobachtung dessen, daß CIM + CIF + FIL + MIL, die vor der Ebne ACBL liegende halbe Kugelfläche, oder die Hemisphäre IACBL' ausdrücken, so wird kommen

$$2\,\text{CMI} + \tfrac{1}{2}S =$$
$$\frac{S}{4D}(\text{Wink. CIKM} + \text{Wink. IMFA} + \text{Wink. ICLB}).$$

Die drey Flächenwinkel CIKM, IMFA, ICLB sind offenbar diejenigen, welche die Ebnen der Seiten des sphärischen Dreyecks ICM mit einander einschließen. Zur Abkürzung wollen wir sie durch einen einzigen Buchstaben ihrer Gränze bezeichnen, nehmlich durch den, welcher sich beym Durchschnitte zweyer Seiten des Dreyecks befindet; auf diese Art werden die Winkel CIKM, IMFA, ICLB respectiv durch I, M, C bezeichnet seyn, und wir werden haben

$$2\,\text{CMI} + \tfrac{1}{2}S = \frac{S}{4D}(\text{I} + \text{M} + \text{C}).$$

zieht man beyderseits $\frac{1}{2}S$ ab, so werden wir erhalten

$$2\,\text{CMI} = \frac{S\,(\text{I} + \text{M} + \text{C})}{4D} - \tfrac{1}{2}S;$$

bringt man endlich alle Glieder dieses Ausdrucks von 2CMI auf einerley Benennung, so erhält man, indem man die Hälfte des Resultats nimmt

$$\text{CMI} = \frac{S\ (I + M + C - 2D)}{8D},$$

welches geben wird

$$\text{CMI} : S = I + M + C - 2D : 8D\ ^*).$$

§. 301. Lehrsatz.

Die Differenz der körperlichen Räume der von den im Bogen aLD eingeschriebenen und umschriebenen Theilen abcd und ABCD regulärer Polygone, Fig 139. während der Umdrehung dieses Bogens um die Axe ap erzeugten Körper, und welche von der unter eben diesen Umständen durch die Gerade DO beschriebenen Kegelfläche begränzt sind, kann so klein als man will werden, wenn man die Anzahl der Seiten dieser Polygone hinlänglich vervielfältigt.

Beweis.

Nachdem man auf ap die senkrechte be gefällt, und die Halbmesser BO, CO gezogen hat, verlängere man die Gerade cb, bis sie die Axe ap in t trift, und führe vom Puncte O auf ab und bc die senkrechte Oh und Oi.

Nachdem dieses geschehen, werden offenbar die Sehne ab und der Halbmesser Ob während ihrer Umdrehung um aO zwey Kegel erzeugen, deren jeder den von der senkrechten be beschriebenen Kreis zur Basis hat. Die Summe ihrer Volumen, oder das Volumen des

---

*) Die Winkel I, M und C sind selbst die Winkel des vorgelegten sphärischen Dreyecks (S. Anfangsgründe der Trigonometrie und höhern Geometrie, zweyter Abschnitt).

vom Dreyecke abO erzeugten Körpers wird also durch $\frac{1}{3}$ aO × Kreis be ausgedrückt seyn (§. 274.). Nun ist in §. 270. bewiesen worden, daß die Oberfläche des von der Sehne ab erzeugten Kegels zum Ausdrucke hat $\frac{1}{2}$ ab × Kreis be, welches auf

$$\pi \times be \times ab \text{ (§. 155.)}$$

zurück kommt; man hat aber auch Kreis be $= \pi \overline{be}^2$; hieraus folgt, daß

$$\text{Oberfl. d. Kegels ab : Kreis be} = \pi \times be \times ab : \pi \times \overline{be}^2$$

oder

$$= ab : be,$$

wenn beyde Glieder des zweyten Verhältnisses durch $\pi \times$ be dividirt werden. Vergleicht man endlich die Dreyecke abe und ahO, welche ähnlich sind, weil jedes derselben rechtwinklicht ist, und sie ferner den Winkel in a gemein haben, so wird man erhalten

$$ab : be = aO : Oh,$$

woraus folgt

$$\text{Oberfl. d. Keg. ab : Kreis be} = aO : Oh,$$

und folglich

$$\text{Kreis be} = \frac{Oh}{aO} \times \text{Oberfl. d. Keg. ab.}$$

Zufolge dieses Ausdrucks wird das Volumen des vom Dreyecke abO erzeugten Körpers, welches $\frac{1}{3}$ aO × Kr. be gleich ist, sich in

$$\frac{1}{3} Oh \times \text{Oberfl. des Kegels ab}$$

verwandeln, woraus folgt, daß das Volumen eines durch die Bewegung eines Dreyecks um eine seiner Seiten aO erzeugten Körpers zum Maaße hat, den driteen Theil der Oberfläche des von einer der

andern Seiten erzeugten Kegels multiplicirt durch die auf diese Seite gefällte senkrechte.

Hiernächst wird das Volumen des vom Dreyecke Oct erzeugten Körpers gleich seyn $\frac{1}{3}$ Oi × Oberfläche des Kegels ct, indessen das Volumen des vom Dreyecke Obt erzeugten Körpers gleich ist $\frac{1}{3}$ Oi × Oberfläche des Kegels bt; die Differenz dieser beyden Ausdrücke oder das Maaß des vom Dreyecke cOb erzeugten Körpers wird offenbar gleich seyn $\frac{1}{3}$ Oi × der Differenz zwischen der Oberfläche des Kegels ct und der des Kegels bt, welche genau die Oberfläche des von der Seite cb beschriebenen abgestumpften Kegels ist. Dieselben Schlüsse beweisen auch, daß das Volumen des vom Dreyecke Odc erzeugten Körpers von $\frac{1}{3}$ Ol × Oberfläche des von dc beschriebenen abgestumpften Kegels gemessen wird. Fährt man auf diese Art fort, mit Erwägung dessen, daß die senkrechten Oh, Oi, Ol ꝛc. alle einander gleich sind, so sieht man, daß, bey jeder auch noch so großen Anzahl der Seiten ab, bc, cd ꝛc. das Volumen des von diesem Theile des Polygons beschriebenen Körpers zum Maaße haben wird $\frac{1}{3}$ Ol × die Summen der von den Seiten ab, bc, cd ꝛc. beschriebenen Flächen, oder durch die ganze Oberfläche des vorgelegten Körpers.

Wendet man dieses Resultat auf das umschriebene Polygon ABCD an, so wird man finden, daß das Volumen des von ihm erzeugten Körpers gleich ist $\frac{1}{3}$ OL × seiner Oberfläche; und da (§. 294.) bewiesen worden, daß die Oberfläche dieses Körpers und des correspondirenden eingeschriebenen Körpers einander so nahe als man will kommen können, während daß die Differenz

der

der Halbmesser OL und Ol unaufhörlich abnimmt, so folgt offenbar, daß ihre Volumen sich unaufhörlich der Gleichheit nähern, und daher einander so nahe als man will kommen können.

§. 302. Zusatz.

Es ist offenbar, daß der vom Kreisausschnitt aLdO beschriebene Körper, welchen man einen Kugelausschnitt nennt, kleiner ist als der vom Theile des umschriebenen Polygons erzeugte Körper, und größer als der vom eingeschriebenen Polygon erzeugte; es folgt also aus dem vorhergehenden Lehrsatze, daß die Differenz zwischen dem Volumen des ersten Körpers und dem eines der beyden andern so klein als man will gemacht werden kann, wenn man die Anzahl der Seiten dieser Polygone hinlänglich vervielfältigt.

§. 303. Lehrsatz.

Das Volumen eines Kugelausschnitts ist gleich der Oberfläche des Ausschnitts, auf welchem er steht, multiplicirt durch den dritten Theil des Halbmessers, oder $\frac{1}{3}SR$, wenn S diese Oberfläche und R den Halbmesser bezeichnet.

Beweis.

Wenn P die Oberfläche des vom Theile des umschriebenen Polygons ABCD erzeugten Körpers bezeichnet, so wird das Volumen dieses Körpers durch

$$P \times \tfrac{1}{3}OL, \text{ oder } \tfrac{1}{3}PR$$

ausgedrückt seyn (§. 301.); nennt man nun wie gewöhnlich X das wirkliche Maaß des Volumens des Ku-

gelausschnitts, so wird man die drey Größen $\frac{1}{3}$PR, $\frac{1}{3}$SR und X haben, die sich unter den Umständen des §. 185. befinden, und man kann hieraus schließen, daß nothwendigerweise $X = \frac{1}{3}SR$.

Es ist klar, daß man in diesem Resultate das Volumen des Kugelausschnitts hat, weil seine Oberfläche die des vom Bogen ad beschriebenen Kugelabschnitts ist.

§. 304. Erster Zusatz.

Hieraus folgt, daß das Volumen der Kugel gleich ist ihrer Oberfläche, multiplicirt durch den dritten Theil des Halbmessers, weil, wenn statt des Bogens ad der vierte Theil des Umkreises, oder am genommen wird, der Kugelausschnitt der Halbkugel gleich wird, indem der auf aO senkrechte Halbmesser mO eine Ebne beschreibt, welche die Kugel in zwey gleiche Theile theilt, und man wird für die obere Hälfte oder Hemisphäre $\frac{1}{2}S \times \frac{1}{3}mO$ erhalten, wenn man S für die ganze Kugelfläche nimmt; werden beyde Hälften zusammen genommen, so wird man $S \times \frac{1}{3}mO$ für das Volumen der Kugel erhalten.

Da die Kugelfläche vier Mahl größer als die ihres größten Kreises, oder vier Kreisen gleich ist, so wird ihr Volumen seyn $\frac{4}{3}R \times$ dem Kreise oder $\frac{2}{3}D \times$ dem Kreise, das heißt, das Volumen der Kugel ist gleich ihrem größten Kreise multiplicirt durch zwey Drittheile des Durchmessers.

§. 305. Zweyter Zusatz.

Wollte man das Volumen eines Ausschnitts haben, der von einem Bogen aOn erzeugt ist, welcher größer als

der Quadrant ist, so müßte man von der ganzen Kugel den vom Bogen nOp erzeugten Abschnitt, welcher $\frac{1}{3}$mO × der Oberfläche des vom Bogen np erzeugten Abschnitts gleich ist, abziehen; die Differenz würde also seyn $\frac{1}{3}$nO multiplicirt in die Differenz zwischen der ganzen Kugelfläche und der des von np beschriebenen Abschnitts, welche Differenz nichts anders als die vom Bogen amn beschriebene Oberfläche, oder die des dem vorgelegten Ausschnitte als Basis dienenden Abschnitts ist.

§. 306. Dritter Zusatz.

Das Volumen des vom halben Kreissegment aLdg erzeugten Theils der Kugel, welchen man ein Kugelsegment nennt, wird erhalten, wenn man vom Volumen des vom Kreisausschnitt aLdO erzeugten Kugelausschnitts das des vom Dreyecke dgO beschriebenen Kegels abzieht.

Das Volumen des zwischen der vom Bogen dLc beschriebenen Zone, und den von den senkrechten dg, cf beschriebenen Kreisen liegenden Theils erhält man, wenn das vom Bogen acf beschriebene Kugelsegment von dem vom Bogen adg beschriebenen abgezogen wird.

Von der Vergleichung der runden Körper.

§. 307.

Aehnliche runde Körper sind diejenigen, welche von ähnlichen Figuren erzeugt worden sind; dergleichen sind die von den ähnlichen Dreyecken ACS, A′C′S Fig. 129. erzeugten Kegel SADB, SA′D′B′.

Aus §. 266. folgt, daß die Seiten, die Höhen und die Umkreise der Grundflächen ähnlicher Kegel proportional sind, und daß sich die Grundflächen wie die Quadrate homologer Linien verhalten.

Die von den ähnlichen Rechtecken ACC′A′, acc′a′ Fig. 133. erzeugten Cylinder ADB, A′D′B′, adb, a′d′b′ sind ebenfalls ähnlich; und die Aehnlichkeit dieser Figuren giebt auch die gleichen Verhältnisse

$$AA' : aa' = AC : ac = \text{Umkr. } AC : \text{Umkr. } ac$$

$$\overline{AA'^2} : \overline{aa'^2} = \overline{AC^2} : \overline{ac^2} = \text{Kreis } AC : \text{Kreis } ac.$$

Da endlich die Kreise ähnliche Figuren sind, so sind auch die Kugeln ähnliche Körper.

§. 308. Lehrsatz.

Die Oberflächen ähnlicher Kegel verhalten sich wie die Quadrate der Seiten dieser Kegel, und ihre Volumen wie die Cubus eben dieser Seiten.

Beweis.

1) Wenn man die beyden Proportionen

$$\text{Umkr. } AC : \text{Umkr. } A'C' = AS : A'S \quad \text{Fig. 129.}$$

$$\tfrac{1}{2}AS : \tfrac{1}{2}A'S = AS : A'S$$

nach der Ordnung in einander multiplicirt, so wird kommen

$$\tfrac{1}{2}AS \times \text{Umkr. } AC : \tfrac{1}{2}A'S \times \text{Umkr. } A'C' = \overline{AS^2} : \overline{A'S^2},$$

einel Proportion, deren zwey erste Glieder die Oberflächen der Kegel SADB, SA′D′B′ angeben (§. 270.).

2) Wenn man die beyden Proportionen

$$\text{Kreis } AC : \text{Kreis } A'C = \overline{AS^2} : \overline{A'S^2}$$

$$\tfrac{1}{3}CS : \tfrac{1}{3}C'S = AS : A'S$$

in einander multiplicirt, so wird man haben

$\frac{1}{3}$ CS × Kreis AC : $\frac{1}{3}$ C'S × Kreis A'C' = $\overline{AS}^3 : \overline{A'S}^3$,

eine Proportion, deren zwey erste Glieder die Volumen der vorgelegten Kegel SADB, SA'D'B angeben (§. 274.).

§. 309. Lehrsatz.

Die Oberflächen ähnlicher Cylinder verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten, und ihre Volumen wie die Cuben eben dieser Seiten.

Beweis.

1) Wenn man die beyden Proportionen

Umkr. AC : Umkr. ac = AA' : aa' Fig. 133.

AA' : aa' = AA' : aa'

(§. 307.) nach der Ordnung in einander multiplicirt, so wird daraus erfolgen

AA' × Umkr. AC : aa' × Umkr. ac = $\overline{AA'^2} : \overline{aa^2}$,

eine Proportion, deren beyde erste Glieder die Oberflächen der vorgelegten Cylinder ausdrücken (§. 279.).

2) Multiplicirt man die beyden Proportionen

Kreis AC : Kreis ac = $\overline{AA'^2} : \overline{aa'^2}$

AA' : aa' = AA' : aa'

(§. 307.) nach der Ordnung, so wird man haben

AA' × Kreis AC : aa' × Kreis ac = $\overline{AA'^3} : \overline{aa'^3}$,

eine Proportion, deren beyde erste Glieder die Volumen der vorgelegten Cylinder ausdrücken.

§. 310. Lehrsatz.

Die Oberflächen zweyer Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser, und ihre Volumen wie die Cuben eben dieser Linien.

Beweis.

Es seyen R und R′ die Halbmesser der vorgelegten Kugeln, D und D′ ihre Durchmesser, S und S′ ihre Oberflächen, C und C′ die Umkreise ihrer größten Kreise; so wird man haben

1) $$C : C' = D : D';$$

multiplicirt diese durch die evidente Proportion

$$D : D' = D : D',$$

so wird man haben

$$C \times D : C' \times D' = D^2 : D'^2;$$

nun bezeichnen $C \times D$ und $C' \times D'$ die Kugelflächen (§. 297.); folglich

$$S : S' = D^2 : D'^2$$
$$= 4R^2 : 4R'^2 = R^2 : R'^2,$$

wenn man in Erwägung zieht, daß $D = 2R$ und $D' = 2R'$.

2) Wenn die beyden Proportionen

$$S : S' = R^2 : R'^2$$
$$\tfrac{1}{3}R : \tfrac{1}{3}R' = R : R'$$

nach der Ordnung multiplicirt werden, so wird man haben

$$\tfrac{1}{3}RS : \tfrac{1}{3}R'S' = R^3 : R'^3,$$

eine Proportion, deren zwey erste Glieder die Volumen der vorgelegten Kugeln ausdrücken (§. 304.), und da $R^3 : R'^3 = D^3 : D'^3$, so wird man auch haben

$$\tfrac{1}{3}RS : \tfrac{1}{3}R'S' = D^3 : D'^3.$$

§. 311. Anmerkung.

Man vergleicht gewöhnlich die Kugel mit dem umschriebenen Cylinder, das heißt mit dem Cylinder FGF′G′, Fig. 138., deren Grundflächen dem größten

Kreise der Kugel OCC′ gleich sind, und deren Höhe FF′ dem Durchmesser eben dieser Kugel gleich ist. Die Oberfläche dieses Cylinders, welche von F′F′ × Umkr. FC gemessen wird (§. 279.) ist der der Kugel gleich (§. 297.), weil FF′ = CC′ und Umkr. FC = Umkr. CO.

Vergleicht man das Volumen eben dieses Cylinders, welches durch FF′ × Kreis FC ausgedrückt ist (§. 282.) mit dem der Kugel, welches von $\frac{2}{3}$ CC′ × Kreis OC gemessen wird (§. 304.), so wird erfolgen, daß dieses letztere nur zwey Drittheile von dem des erstern ist.

§. 312. Schlußanmerkung.

Ich habe im Vorhergehenden nur die zur Ausmessung der Körper nöthigsten Sätze vorgetragen; diejenigen, welche die Theorie der Durchschnitte der Ebnen und krummen Oberflächen kennen lernen wollen, welche die Fortsetzung der Geometrie in ihrem ganzen Umfange betrachtet ausmachen, können meinen Versuch einer Geometrie über die Ebnen und krummen Oberflächen zu Rathe ziehen.

Was die regulären Körper, oder die von gleichen regulären und einerley Flächenwinkel bildenden Polygonen begränzten Polyedra anbelangt, so sind sie in der Geometrie von Legendre vollständig abgehandelt. Ich will hier nur noch anmerken, daß die Anzahl dieser Körper nicht größer als fünf seyn kann, und daß sie nur aus gleichseitigen Dreyecken oder Vierecken oder Fünfecken gebildet werden können. Dieses ist klar, wenn man in Erwägung zieht, daß man, weil die Summe der eine körperliche Ecke bildenden ebnen Winkel kleiner

als vier rechte seyn muß, nicht ein Mahl aus dreyen Sechsecken eine körperliche Ecke bilden kann; denn die Summe der drey ebnen Winkel würden dann vier rechten gleich seyn (§. 80.); noch weniger könnte man mehr als drey Sechsecke oder Polygone von einer größern Anzahl Seiten zusammen setzen. Nach diesen Gründen sieht man, daß drey, vier oder fünf gleichseitige Dreyecke und nur drey Quadrate oder drey Fünfecke zusammengesetzt werden können, um eine körperliche Ecke zu bilden, welches wirklich fünf Körper darbiethet.

Derjenige, dessen Ecken körperliche und die Seiten ebne Dreyecke sind, ist das aus vier gleichseitigen Dreyecken gebildete reguläre Tetraedrum, Fig. 140.

Das Octaedrum hat zu seinen Ecken körperliche Dreyecke, und ist aus acht gleichseitigen Dreyecken gebildet, Fig. 141.

Das Icosaedrum hat fünfseitige Ecken, und ist aus zwanzig gleichseitigen Dreyecken gebildet, Fig. 142.

Das Hexaedrum oder der Cubus hat zu Ecken körperliche Dreyecke, und ist aus sechs gleichen Quadraten gebildet, Fig. 143.

Das Dodecaedrum hat ebenfalls körperliche Dreyecke, und ist aus zwölf Fünfecken gebildet.

Zusätze.

Zu §. 4.

Alles unser Messen besteht im Aufsuchen des Verhältnisses einer vorgelegten Größe zu einer andern ihr gleichartigen und als bekannt vorausgesetzten Größe, welche dann das Maaß heißt. Soll zum Beyspiel die Länge eines Balkens in Fußen bestimmt werden, so wird die Länge eines Fußes als bekannt vorausgesetzt, und findet es sich, daß diese letztere Länge 10 Mahl auf die erstere getragen werden kann, so hat man diese Proportion

die Länge eines Fußes : der Länge des Balkens = 1 : 10;

mithin, wenn die äußern und mittlern Glieder in einander multiplicirt werden

die Länge des Balkens = 10 × der Länge des Fußes.

Wenn sich das angenommene Maaß nicht genau eine Anzahl Mahl auf die auszumessende Größe tragen läßt, so wird auch dieß erstere nicht mehr als Einheit beybehalten. Man wählt alsdann einen bestimmten, etwa den zwölften Theil desselben, und untersucht, wie oft er in der auszumessenden Größe genau enthalten ist; findet sich dieser darin 121 Mahl enthalten, so wird man haben

die Länge dieses Theils : der Länge des Balkens = 1 : 121;

mithin durch die Multiplication der äußern und mittlern Glieder

121 × Länge dieses Theils = der Länge des Balkens; oder, wenn diese Theile durch die Division mit 12 auf Fuße zurückgebracht werden

$$\text{Länge des Balkens} = \frac{121}{12} \times \text{L. eines Fußes}$$

$$= 10\frac{1}{12} \text{ der Länge eines Fußes.}$$

Läßt sich auch dieser Theil nicht genau eine Anzahl Mahl auf die auszumessende Größe tragen, so wählt man einen noch kleinern aliquoten Theil des Maaßes, nimmt diesen wiederum zum neuen Maaße, und untersucht, wie oft er in der auszumessenden Größe enthalten ist. Auf diese Art fährt man fort, bis man zuletzt einen Theil findet, welcher in der auszumessenden Größe eine Anzahl Mahl genau enthalten ist.

Hierauf beruhet nun die verschiedene Abtheilung des Längenmaaßes. Man wählt gewöhnlich zur Ausmessung der Längen die Ruthe; diese wird in 12 gleiche Theile getheilt und ein solcher Theil wird ein Fuß genannt. Der Fuß wird wiederum in 12 gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil heißt ein Zoll. Der Zoll wird in 12 Linien, die Linie in 12 Scrupel u. s. w. abgetheilt. Die Ruthe wird durch (°), der Fuß durch (′), der Zoll durch (″), die Linie durch (‴), der Scrupel durch (⁗) u. s. w. bezeichnet. Es wird demnach $27°, 11′, 7″, 10‴, 4⁗$ sieben und zwanzig Ruthen, eilf Fuß, sieben Zoll, zehn Linien, vier Scrupel bedeuten.

Dieser Eintheilung zufolge, werden bei den Unter-

abtheilungen des Längenmaaßes folgende Beziehungen anzutreffen seyn.

$1^{\circ} = 12' = 12.12'' = 144'' = 144.12''' = 1728''' = 1728.12'''' = 20736''''$

1 =	12 =	12.12 =	144 =	144.12 =	1728
	1 =		12 =	12.12 =	144
			1	.	12

Diese Eintheilung, welche die zwölftheilige, Duodezimaleintheilung heißt, ist jedoch nur bei den ausübenden Meßkünstlern üblich. Die Geometer theilen, um Leichtigkeit der Rechnung willen, die Ruthe in 10 gleiche Theile, und ein solcher Theil wird ein Dezimalfuß genannt; der Dezimalfuß hat 10 Dezimalzoll, der Dezimalzoll 10 Dezimallinien u. s. w. Bey der Dezimaleintheilung ist also folgende Beziehung anzutreffen:

$1^{\circ} = 10' = 10.10'' = 100'' = 100.10''' = 1000''' = 1000.10'''' = 10000''''$

1 =	10 =	10.10 =	100 =	100.10 =	1000
	1 =		10 =	10.10 =	100
			1		10

Mit Hülfe dieser Tafeln ist es leicht, eine nach dem Dezimalmaaß gemessene Länge in Duodezimalmaaß und umgekehrt auszudrücken. Gesetzt es werde verlangt 7°, $8'$, $9''$ Dezimalmaaß in Duodezimalmaaß zu verwandeln: so darf man nur in Erwägung ziehen, daß 7°, $8' = 78'$, und daß $78'$, $9'' = 789''$; die Vergleichung der obigen Tabellen aber giebt

$$100'' = 144'';$$

man hat also diese Proportion

$$100 : 789 = 144'' : x,$$

mithin

$$x = \frac{144 \cdot 789''}{100} = 1136,16'',$$

oder, wenn man successiv mit 12 dividirt, um sie auf Einheiten höherer Gattung zu bringen,

$$x = 7°, 10', 8, 16''.$$

Wollte man umgekehrt 7°, 10′, 8, 16″ in Dezimalmaaß verwandeln, so verwandle man zuvörderst diese Zahl in die kleinste Gattung von Einheiten, hier in Zolle; diese Größe ist demnach 1136,16″. Schließt man nun

$$144 : 1136{,}16 = 100'' : x,$$

so erhält man $x = 789'' = 7°, 8', 9''$, wenn successiv mit 10 dividirt wird.

Man sieht leicht ein, daß ein wesentlicher Vorzug der zehntheiligen vor der zwölftheiligen Abtheilung darin besteht, daß man bey ersterer nur durch zehn zu multipliciren oder zu dividiren braucht, um eine Zahl in Einheiten niedriger oder höherer Gattung auszudrücken, welches durch das bloße Verrücken des Komma's geschehen kann; dahingegen bey den Duodezimaltheilen dieser Zweck durch die weit mühsamere Multiplication und Division mit 12 erreicht wird.

Zu §. 176.

Von der Berechnung der Flächen.

Nach der im Vorhergehenden gegebenen allgemeinen Erklärung von der Ausmessung der Größen, worin gezeigt wird, daß das Maaß mit der auszumessenden Größe von einerley Art seyn muß, würde folgen, daß man zur Berechnung des Flächeninhalts ebner Figuren eine bekannte Fläche als Einheit annehmen, und dann bestimmen muß, wie oft sie in der auszumessenden Figur ent-

halten ist. Gewöhnlich wählt man das Quadrat zur Einheit, und je nachdem die Seite dieses Quadrats eine Ruthe, ein Fuß, ein Zoll u. s. w. ist, wird diese Fläche eine Quadratruthe, ein Quadratfuß, ein Quadratzoll u. s. w. genannt. Die Quadratruthe wird durch (□°), der Quadratfuß durch (□′) u. s. w. bezeichnet, indem man nehmlich dem Zeichen □ die Bezeichnung der Längenmaaße oberhalb beysetzt. Es bedeutet demnach 5□°, 89□′, 47□″ u. s. w. 5 Quadratruthen, 89 Quadratfuß, 47 Quadratzoll u. s. w. Wir wollen nun die verschiedenen Unterabtheilnngen dieses Maaßes aus dem Vorhergehenden zu bestimmen suchen.

Aus §. 176 folgt, daß bey der Duodezimaleintheilung die Quadratruthe 144 Quadratfuß hat; denn da die Quadratruthe und der Quadratfuß als Quadrate ähnliche Figuren sind, so werden sich die Flächenräume derselben wie die Quadrate ihrer Seiten verhalten. Denkt man sich nun die Seite der Quadratruthe in Fuße zerlegt und drückt den Flächenraum derselben ebenfalls in Quadratfußen aus, so erhält man, da diese Seite alsdann 12 Fuß hat, folgende Proportion

$$\square' : \square^\circ = 1^2 : 12^2 = 1 : 144,$$

und multiplicirt man die äußern und mittlern Glieder in einander, so erhält man

$$1\square^\circ = 144\square'.$$

Aus eben dem Grunde wird der Quadratfuß 144 Quadratzoll, der Quadratzoll 144 Quadratlinien u. s. w. haben. Die Quadratruthe hat demnach 144 . 144 = 20736 □″, und 20736 . 144 = 2985984 □‴. Fol-

gende Tabelle erleichtert sehr den Ueberblick der verschiedenen Unterabtheilungen des Duodezimal = Quadratmaaßes:

□°	□′	□″	□‴
1 =	144 =	20736 =	2985984
	1 =	144 =	20766
		1 =	144

Stellt man eben diese Betrachtungen bey der zehntheiligen Abtheilung an, so wird man leicht bemerken, daß weil alsdann die Seite der Quadratruthe zehn der Seite des Quadratfußes gleiche Theile hat, folgende Proportion Statt haben muß

$$\square' : \square^\circ = 1^2 : 10^2 = 1 : 100;$$

mithin

$$\square^\circ = 100\,\square';$$

und man sieht leicht ein, daß der Quadratfuß 100 Quadratzoll, der Quadratzoll 100 Quadratlinien u. s. w. hat. Diese Unterabtheilungen lassen sich folgendermaßen ordnen.

□°	□′	□″	□‴
1 =	100 =	10000 =	1000000
	1 =	100 =	10000
		1 =	100

Vermittelst der vorhergehenden Tafeln ist es leicht eine im zehntheiligen Quadratmaaße ausgedrückte Zahl ins Zwölftheilige und umgekehrt zu verwandeln. Das einfachste Mittel ist die vorgelegte Zahl auf Einheiten ihrer kleinsten Gattung zu bringen, und dann erst die eigentliche Verwandlung vorzunehmen. Gesetzt man wollte

75 □° 89 □′ 97 □″ Zehntheiliges Maaß ins Zwölftheilige verwandeln, so erwäge man, daß 75 □° = 7500 □′ zu diesen 89 □′ hinzugesetzt, giebt 7589 □′; um diese in Quadratzoll zu verwandeln, hänge man wiederum zwey Nullen daran, und man wird 758900 □″ erhalten; zu welcher Zahl 97 □″ hinzu gesetzt 758997 □″ für die vorgelegte Zahl giebt. Nun schließe man vermöge der vorhergehenden Tafeln

$$10000 : 758997 = 20736 : x,$$

mithin ist

$$x = \frac{758997 \cdot 20736}{10000} = 1573856{,}1792 \square'',$$

oder wenn man successiv mit 144 dividirt, um diese Zahl auf Einheiten höherer Gattung zu bringen, erhält man

75 □° 129 □′ 80,18 □″.

Auch hierbey leuchtet der Vorzug der Dezimal vor der Duodezimaleintheilung ein, indem man bey ersterer nur durch 100 zu multipliciren oder zu dividiren braucht, um eine Zahl auf Einheiten niedriger oder höherer Gattung zu bringen, zu welchem Behuf man nur nöthig hat das Komma um zwey Dezimalstellen weiter zur rechten oder zur linken Seite zu zu setzen; dahingegen bey der zwölftheiligen Eintheilung dieser Zweck durch die weit beschwerlichere Multiplication und Divtsion mit 144 geschehen muß.

Es findet jedoch zwischen der Reduction des Flächenmaaßes und der des Längenmaaßes auf ihre kleinste Benennung ein geringer Unterschied statt, der wohl erwogen zu werden verdient. Soll z. B. 7°, 8′, 9″ auf

Zolle gebracht werden, so braucht man bloß diese drey Ziffern unverändert an einander zu schreiben, und der Zahl 789 das Zeichen der letzten Gattung von Größen zu geben, hier also würden es 789″. Ganz anders verhält es sich aber, wenn man 7 □° 8 □′ 9 □″ auf Quadratzolle reduciren wollte; hierbey würde man offenbar ein falsches Resultat erhalten, wenn man für diese Zahl 789 □″ schriebe; denn aus der obigen Tafel folgt, daß 7 □′ = 70000 □″, welches offenbar schon mehr als 789 □″ ist. In diesem Falle ist es rathsamer ordnungsweise zwey Nullen anzuhängen, und dann die Einheiten kleiner Gattung hinzu zu setzen. Man würde also schließen 7 □° = 700 □′, hierzu 8 □′ hinzu gesetzt, giebt 708 □′; diese in Quadratzolle verwandelt geben 70800 □″, und hierzu 9 □″ hinzugesetzt, erhält man 70809 □″.

Nachdem wir nun die verschiedenen Eintheilungen des Flächenmaaßen auseinander gesetzt, und gezeigt haben, wie man das zehntheilige und zwölftheilige Maaß in einander verwandeln kann, wollen wir von der Berechnung der verschiedenen im Vorhergehenden abgehandelten Flächen ein Beyspiel geben, indem wir uns hierzu des zehntheiligen Maaßes bedienen werden.

1) Der Inhalt eines Rechtecks, auch der eines Parallelograms wird vom Producte aus der Grundlinie in die Höhe gemessen.

Es sey die Grundlinie eines Rechtecks = 62°, 7′, 9″, die Höhe desselben 20°, 8′, so bringe man zuvörderst beyde Zahlen auf einerley Einheiten ihrer kleinsten Gattung,

tung, und multiplicire sie ineinander. In obigen Exempel wird man haben

6279″
multiplicirt durch 2080
50232
12558
Product 13060320 □″

oder wenn diese Zahl auf Einheiten höherer Gattung gebracht wird, erhält man für den Inhalt des vorgelegten Rechtecks 1306 □° 3 □′ 20 □″.

Wenn die vorhergehenden Zahlen die Dimensionen eines Dreyecks wären, so dürfte man nach §. 171. nur das Product halbiren.

2) Um die Seite eines Quadrats, welches mit einem vorgelegten Rechtecke oder Parallelogramm gleichen Inhalt hat, durch Rechnung zu finden, darf man nur aus dem Producte der Grundlinie und Höhe dieses Rechtecks die Quadratwurzel ziehen, welche eben die Benennung haben wird als der Innhalt des Rechtecks im Flächenmaaße hat.

Es sey z. B. die Seite AB des Parallelogramms ABCD Fig. 91. 17°, 6′, 9″ und die Höhe dieses Parallelograms 9°, 0′, 4″, so erhält man

1769″
904
7076
15921
Inh. des Polygr. 1599176 □″.

Die Quadratwurzel hieraus

1,59,91,76″	1264,5″
1	
5,9	22
44	
159,1	246
1476	
1157,6	2524
10096	
1480	2528

giebt die Seite des gesuchten Quadrats; diese ist demnach 1264,5″ oder 12° 6′ 4,5″.

Um die Seite des Quadrats zu finden, welches einem gegebenen Dreyecke gleich ist, muß man aus dem halben Producte der Basis und Höhe auf eben die Art die Quadratwurzel ziehen.

3) Den Inhalt eines Kreises zu finden, braucht man bloß das Quadrat des Halbmessers oder den vierten Theil des Quadrats des Durchmessers durch π oder 3,1415926 zu multipliciren.

Es sey z. B. der Inhalt eines Kreises zu finden, dessen Halbmesser 11′, 4″, so erhält man

114
114
456
114
114

Quadrat des Halbm. 12996□″
multiplicirt durch 3,14

51984
12996
38988

40807,44□″.

Der gesuchte Inhalt ist demnach 40807,44 □″, oder 4 □° 8 □′ 7 □″ 44 □‴.

Diese wenigen Beyspiele werden hoffentlich hinlänglich zeigen, wie man sich bey der Berechnung der im Vorhergehenden betrachteten ebnen Flächen zu verhalten habe, und wir wollen nun zur Berechnung der Körper übergehen.

Von der Berechnung der Körper.

Die bey der Ausmessung der Körper übliche Einheit ist der Cubus oder Würfel, und je nachdem die Seite dieses Cubus eine Ruthe, ein Fuß oder ein Zoll ist, wird sie eine Cubikruthe, ein Cubikfuß, ein Cubikzoll ꝛc. genannt.

Um die verschiedenen Abtheilungen des Cubikmaasses zu finden, darf man nur in Erwägung ziehen, daß sich nach §. 265. ähnliche Cörper wie die Cuben ihrer homologen Seiten verhalten, und daß daher, wenn man sich die Seite der Cubikruthe in 10 Fuße zerlegt denkt, und zur Bezeichnung des Cubikmaaßes dieses Zeichen (C) braucht, folgende Proportion statt haben wird

$$C' : C^{\circ} = 1^3 : 10^3$$

man erhält also durch die Multiplication der äußern und mittlern Glieder

$$C^{\circ} = 1000\ C'.$$

Aus eben dem Grunde muß der Cubikfuß 1000 Cubikzoll, der Cubikzoll 1000 Cubiklinien u. s. w. haben. Wir wollen hier bloß die Tafeln der Abtheilungen des Dezimal- und Duodezimal-Cubikmaaßes hersetzen. Dieses mit Zuziehung dessen, was über die Verwandlung

des Quadratmaaßes gesagt worden, wird hoffentlich hinreichen, über die Verwandlung dieses Maaßes Aufschluß zu geben.

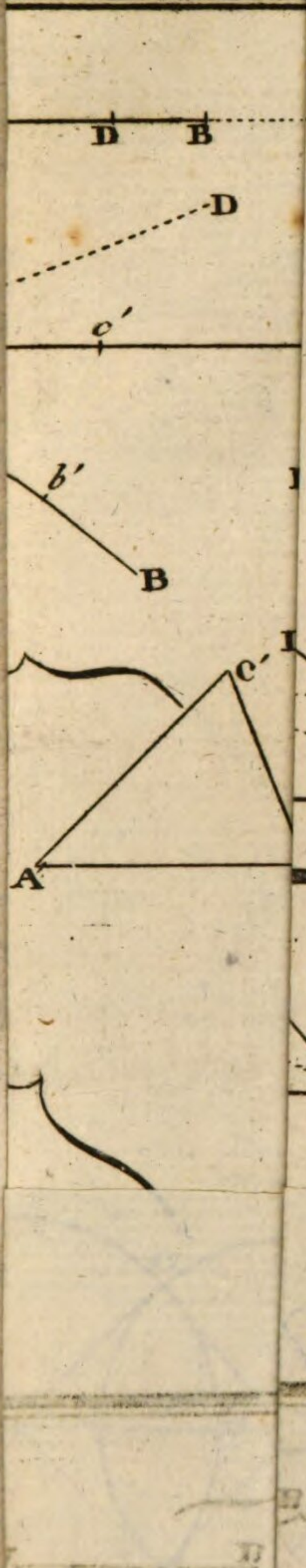
C°	C′	C″	C‴
1 =	1000 =	1000. 1000 =	1000000 = 1000. 1000 = 1000000000
	1 =	1000 =	1000. 1000 = 1000000
		1 =	1000

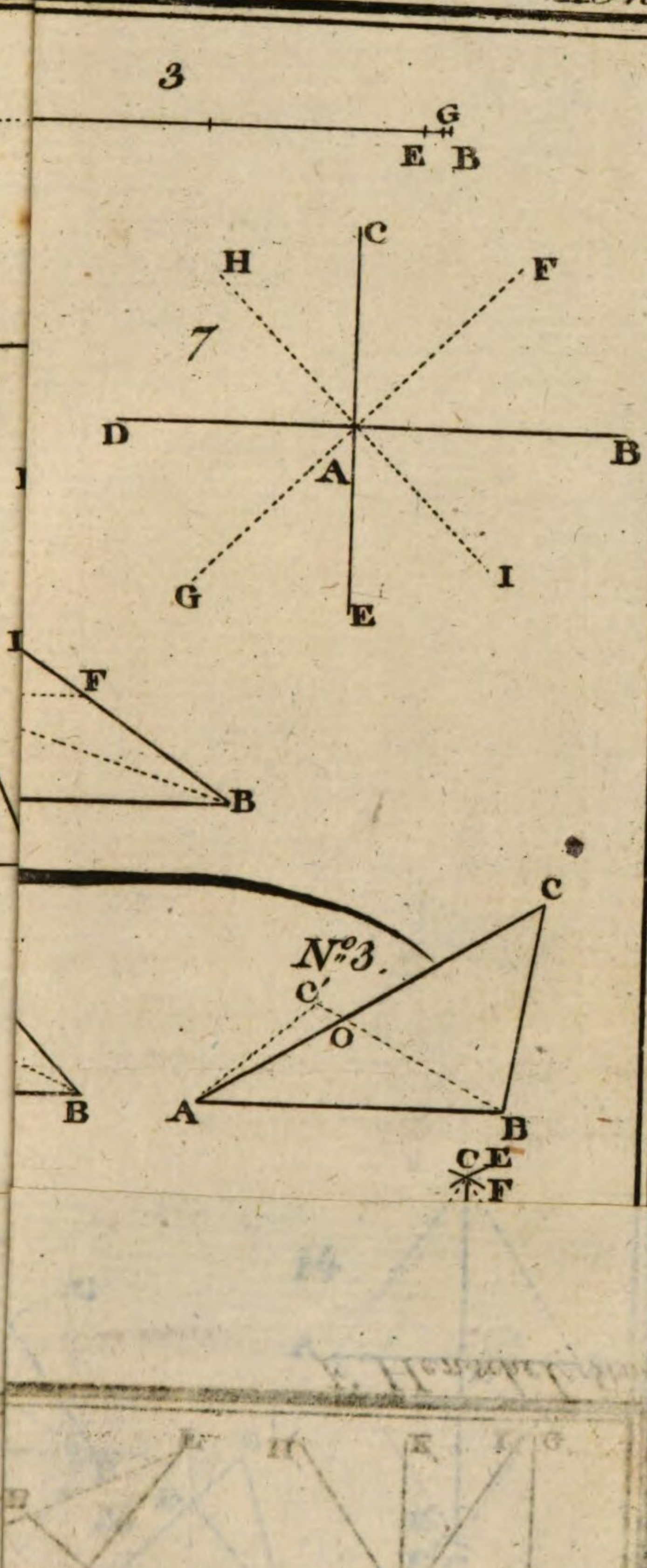
Duodezimal-Cubikmaaß.

C°	C′	C″	C‴
1 =	1728. =	2985984 =	5159760352
	1	1728	2985984
		1	1728

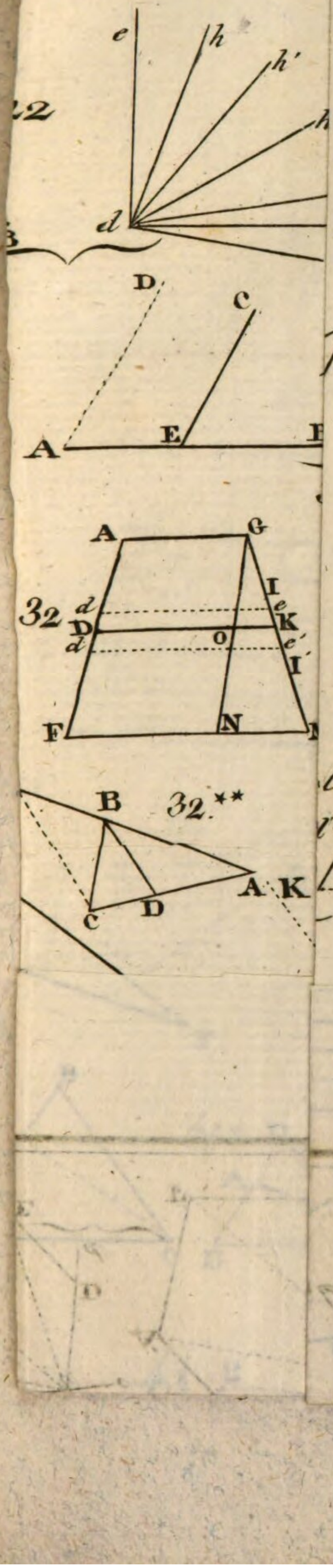
Die Berechnung der Körper läßt sich, wenn man einige Aufmerksamkeit auf die Berechnung der Flächen, und auf die im Vorhergehenden gegebenen Lehren wendet, leicht ausführen, und die einzige hierbey zu beobachtende Regel ist die, alle drey Dimensionen des Körpers auf einerley Gattung von Einheiten zu bringen, und dem Producte im Cubikmaaße ausgedrückt, eben diese Benennung zu geben.

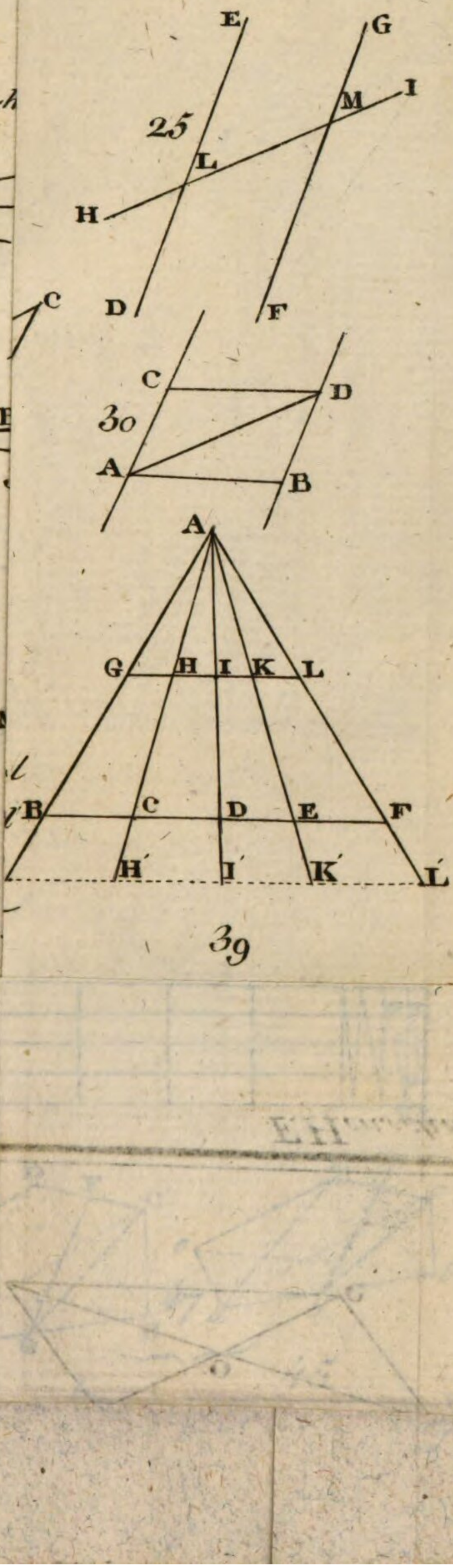
Ende.


D
c′
b′
B
C′
A


3
D
B
G
E
B
7
C
H
F
D
A
B
G
E
I
I
F
B

N.o 3.
C
C′
O
A
B
C
E
F


e
h
h'
d
D
C
A
E
A
G
I
d
K
d
O
e'
I'
F
N
B
A
K
C
D


E
G
M
I
L
H
D
F
C
D
A
B
A
G
H
I
K
L
B
C
D
E
F
H'
I'
K'
L'

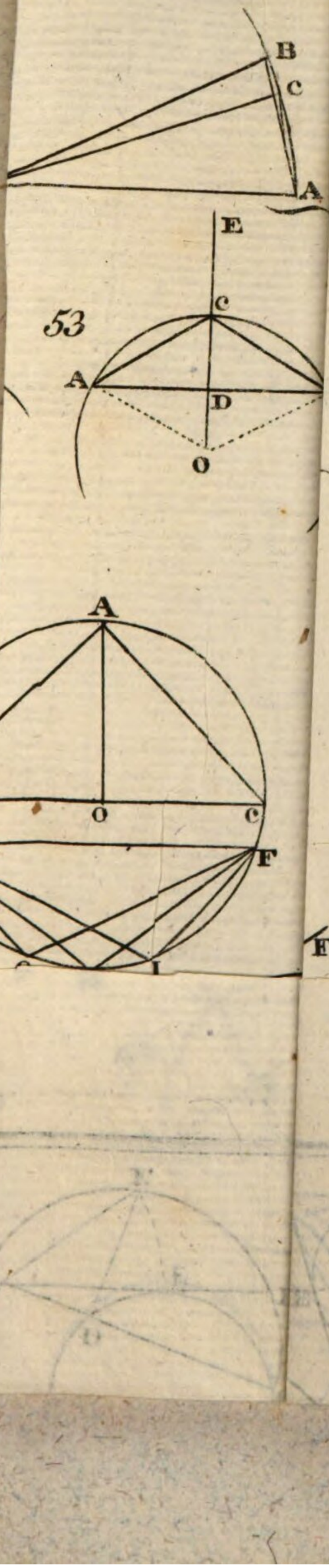
25

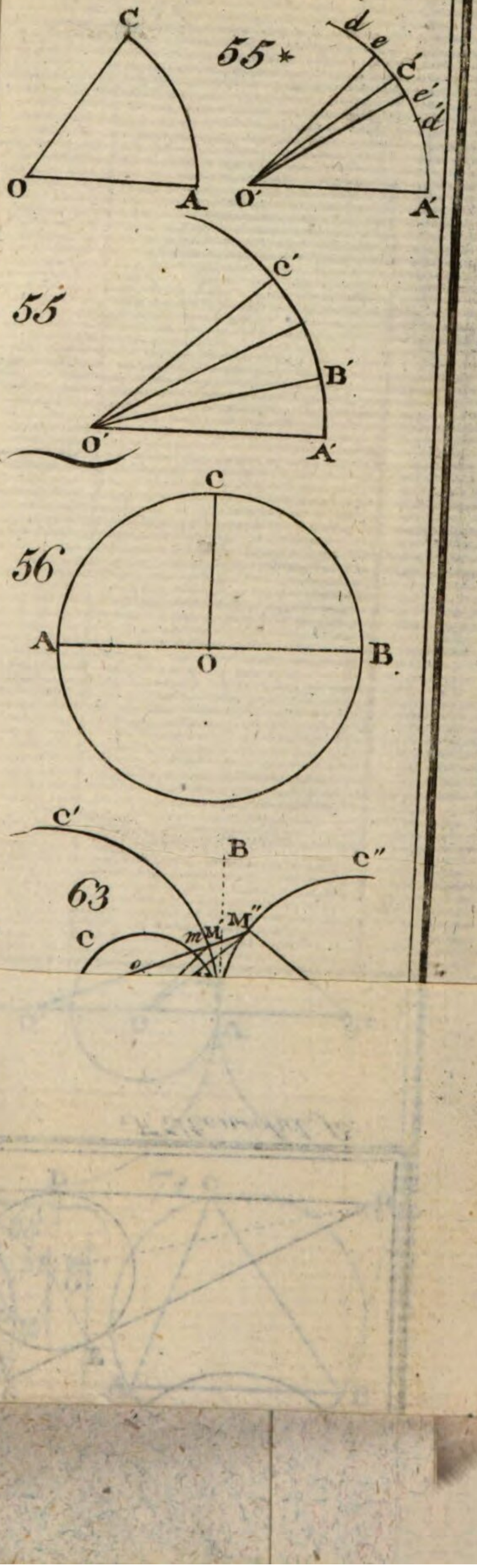
30

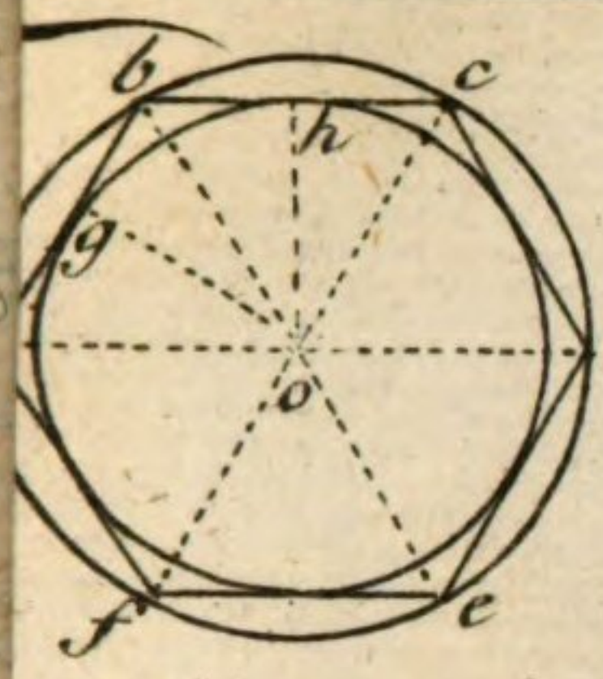
32

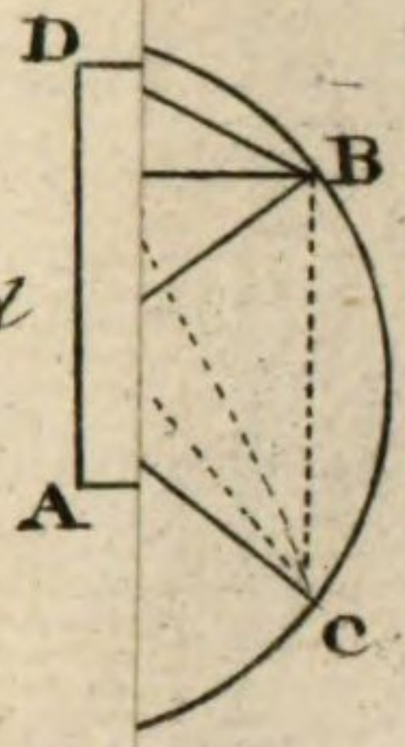
32.**

39

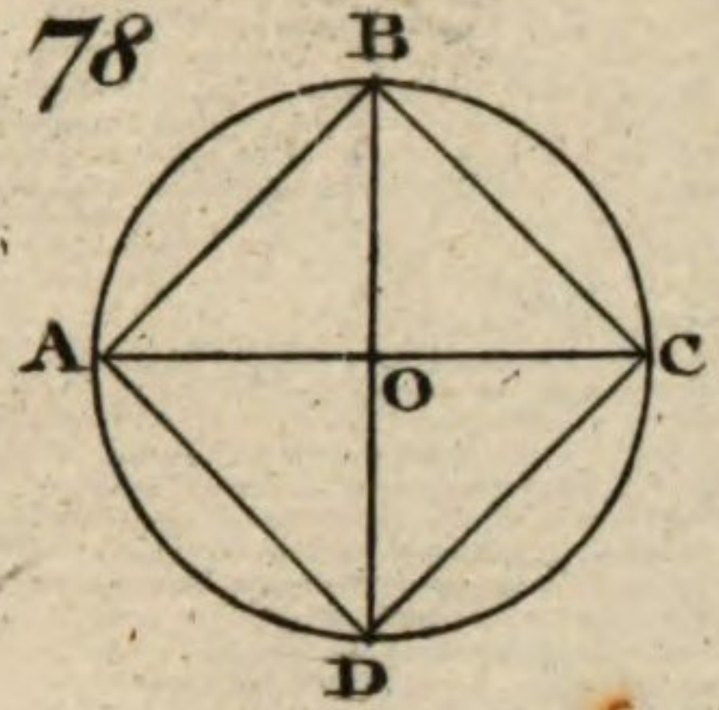

B
C
A
E
c
53
A
D
O
A
O
C
F

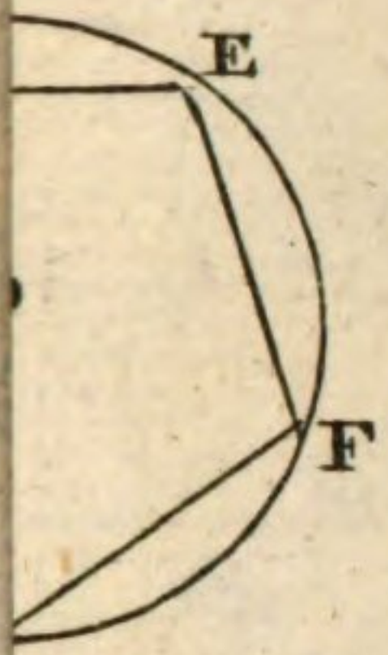

C
55 *
d
e
c
e'
d'
O
A
O'
A'
C'
55
B'
O'
A'
C
56
A
O
B
C'
C
B
C"
63
F
C
m
M'
M"

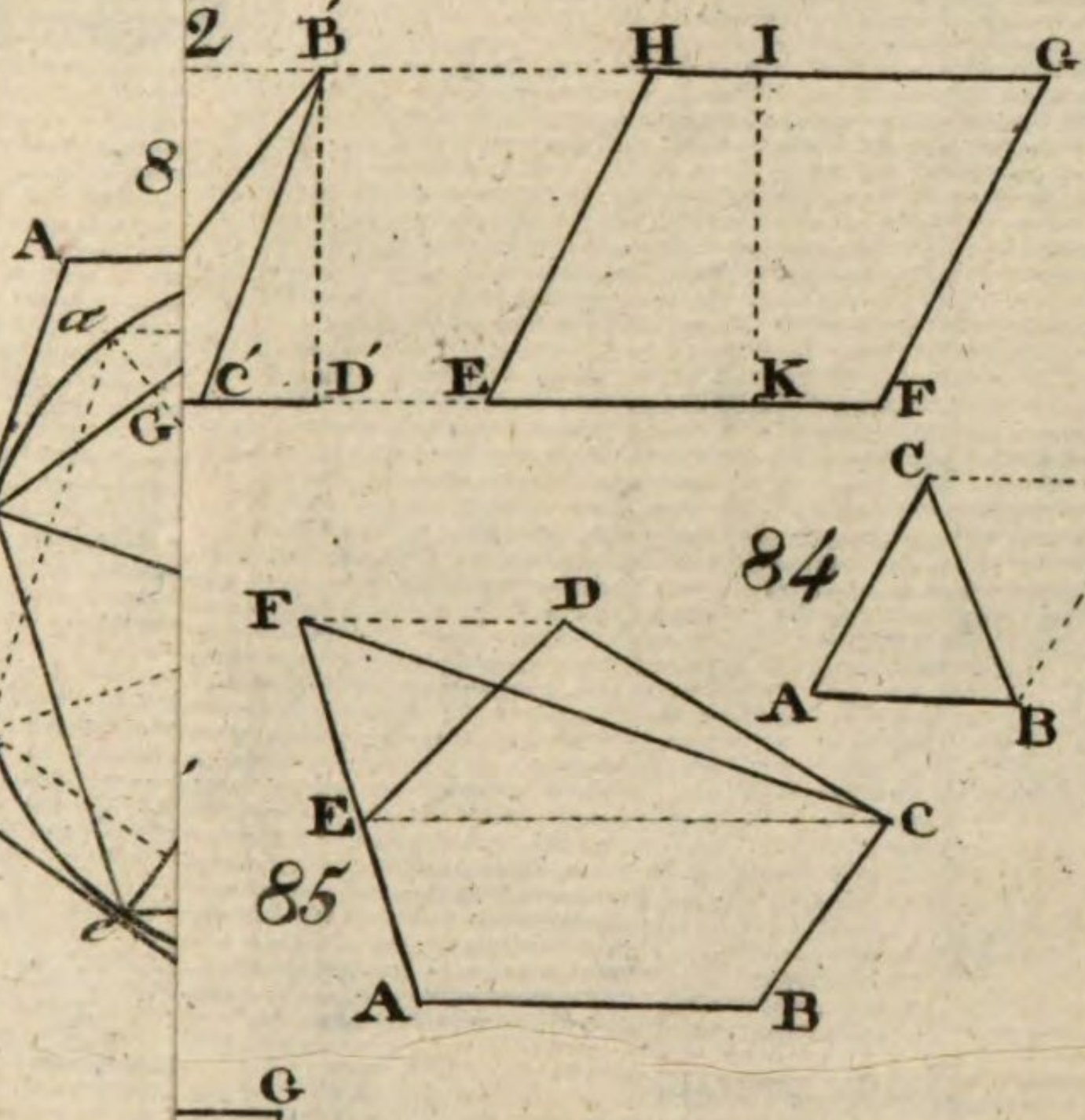

b
c
h
g
d
o
f
e

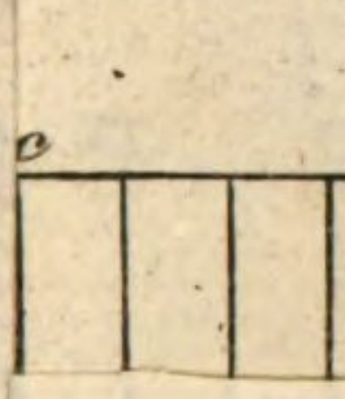

D
B
A
C

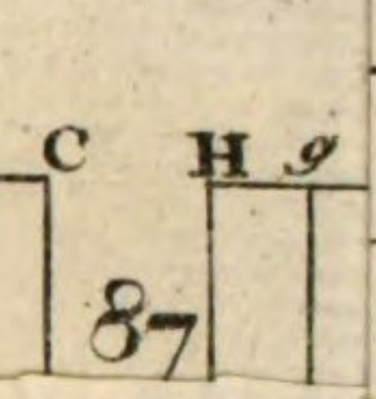
78


B
A
C
O
D


E
F


2
B́
H
I
G
8
A
α
Ć
D́
E
K
F
G
C
D
84
F
D
A
B
E
C
85
A
B


E
F


E
e

e
C

87

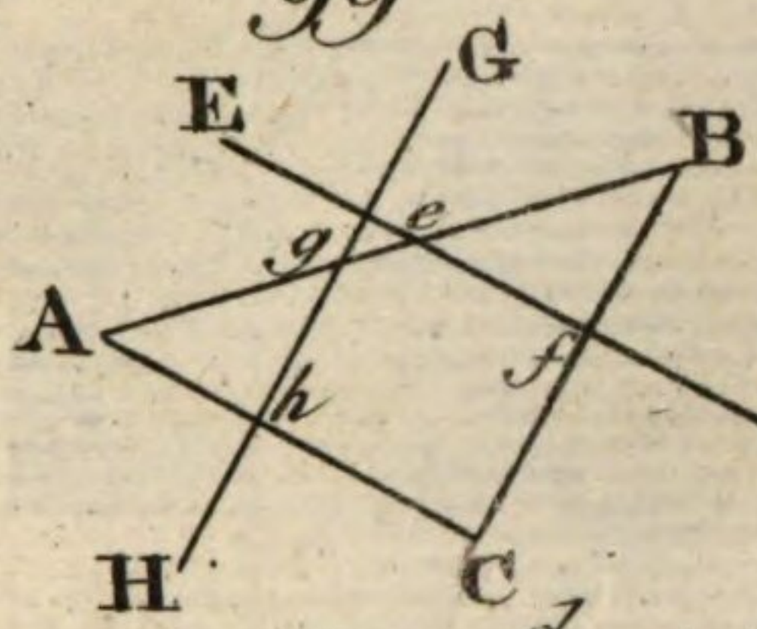
H
g

G
g

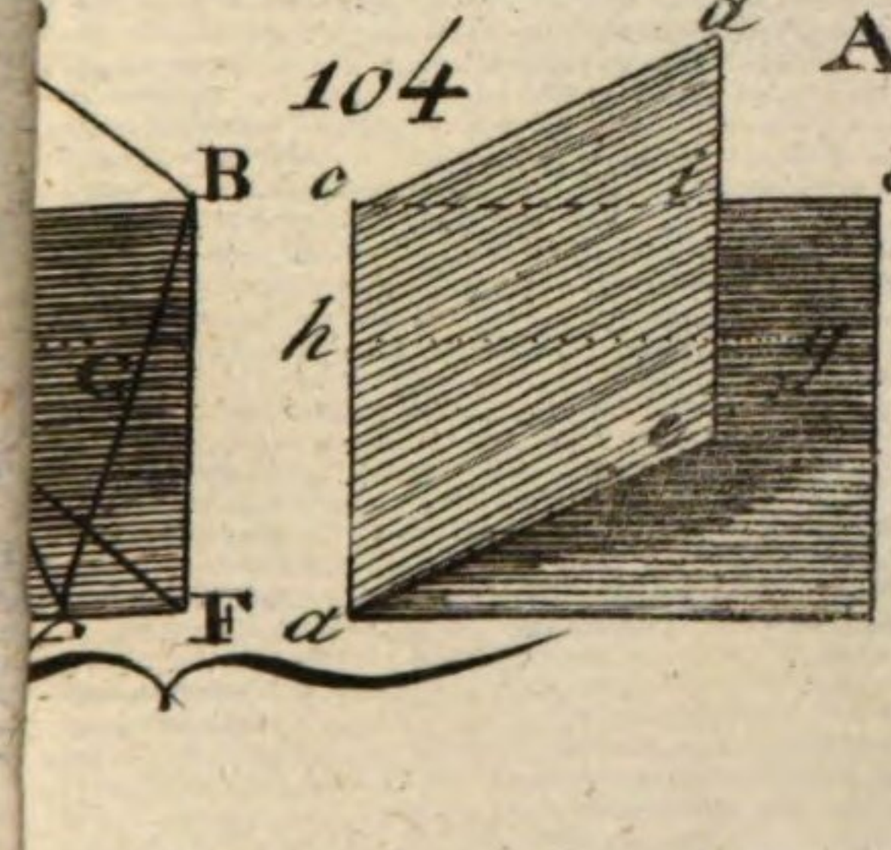
90

D
C
d
c

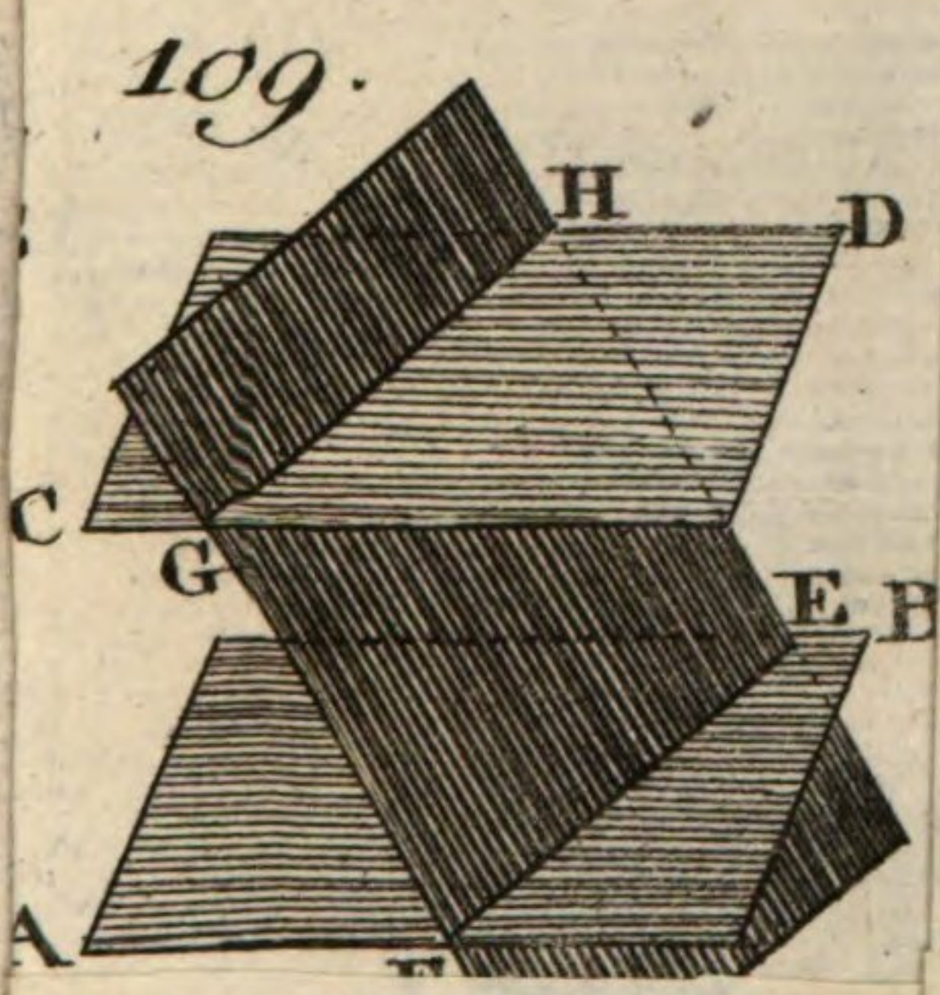
99



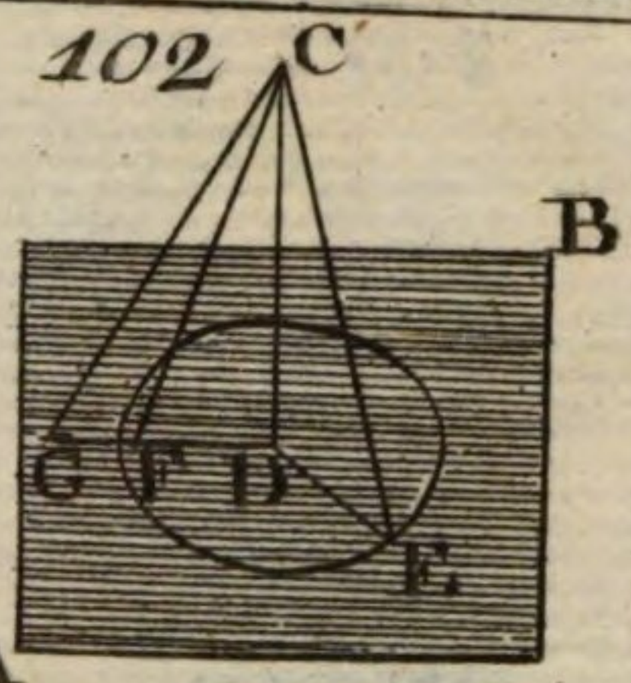
104



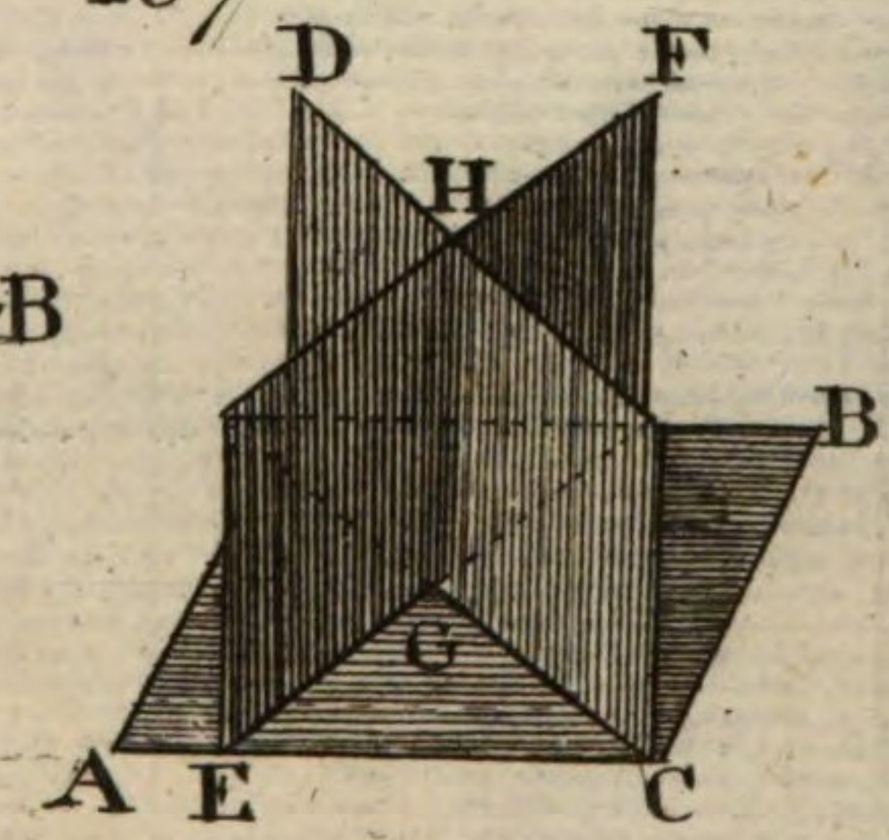
109.



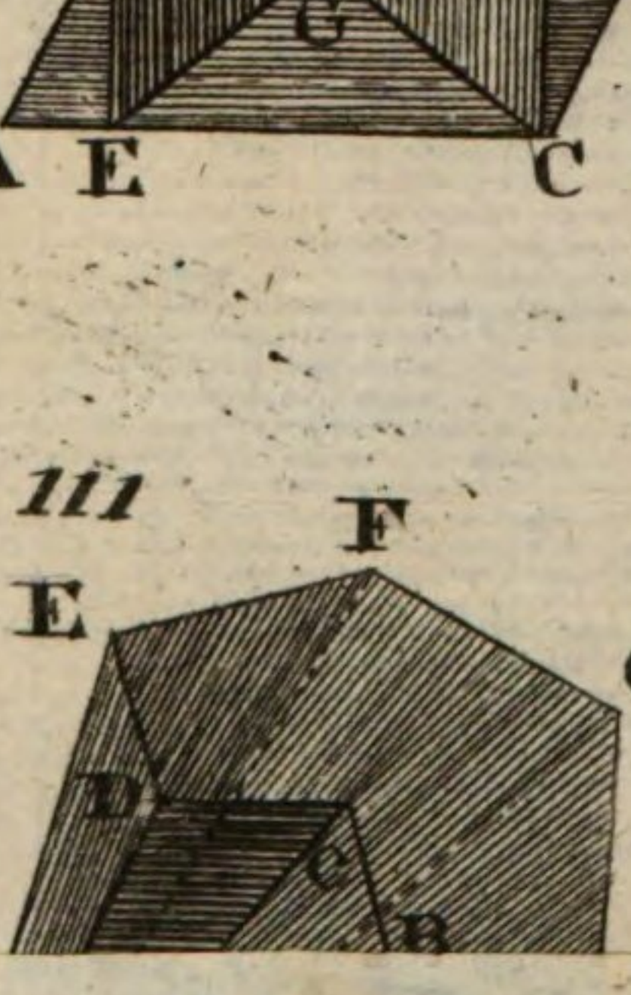
102

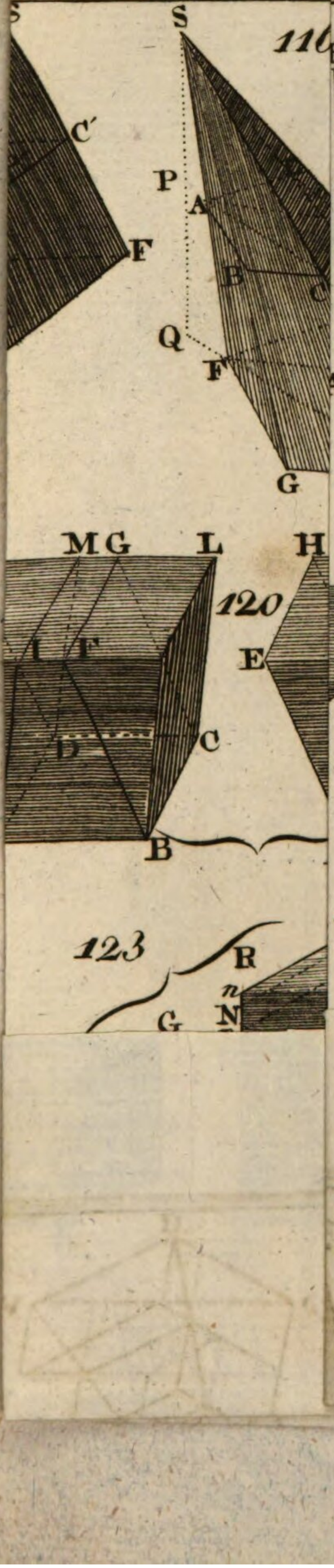


107

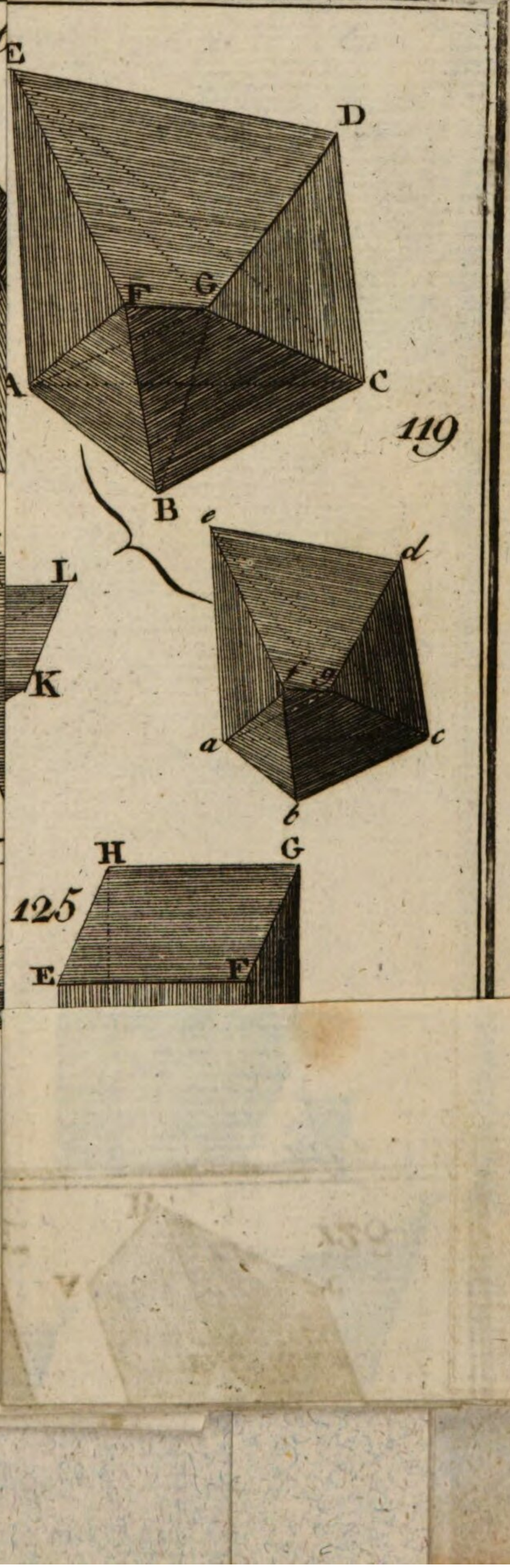


111





116

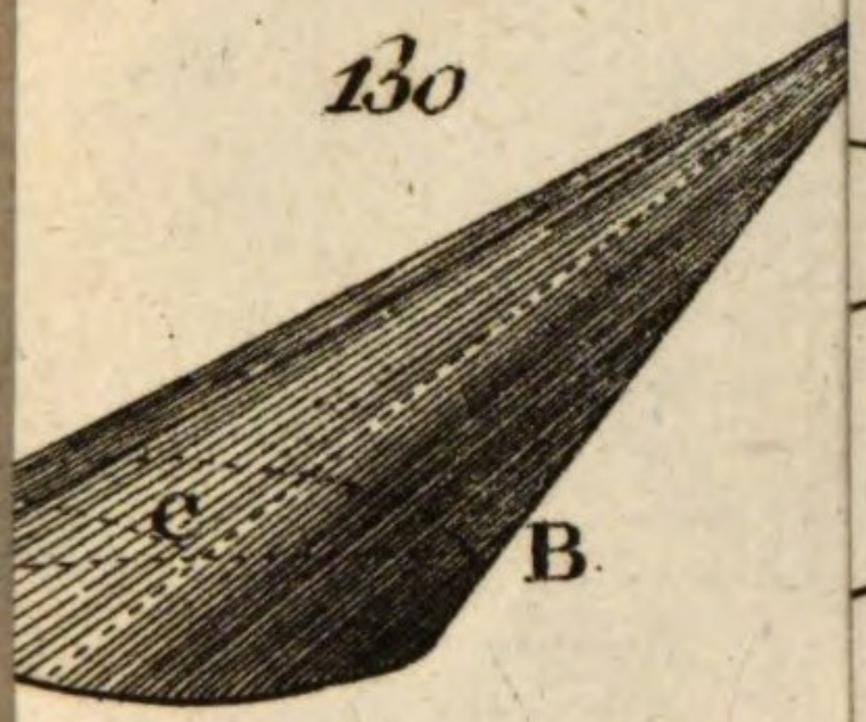


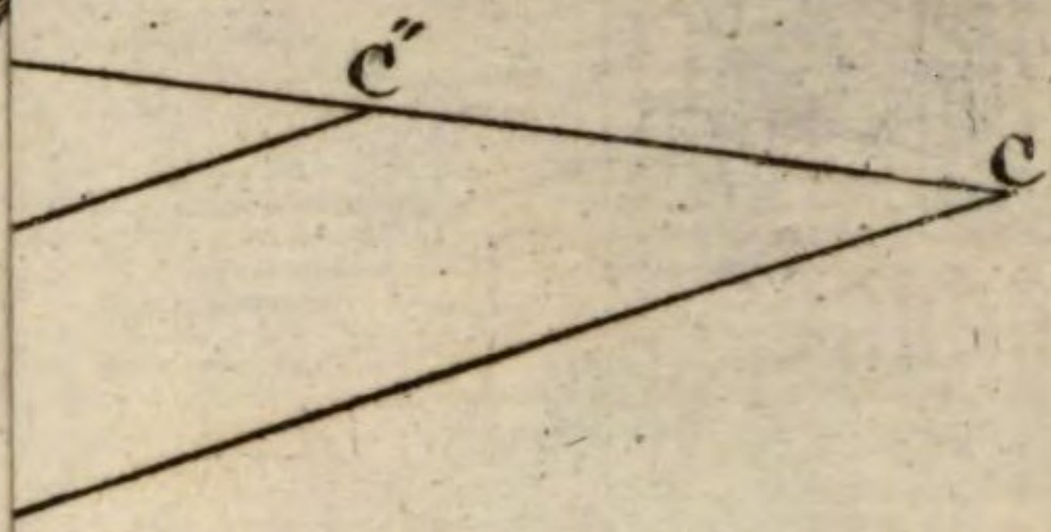
119

120

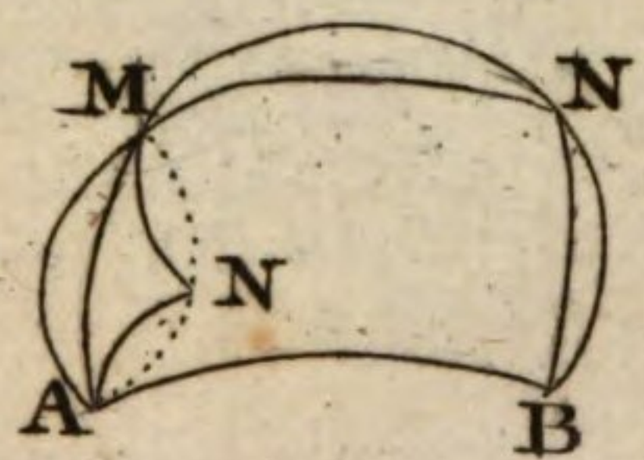
125

130

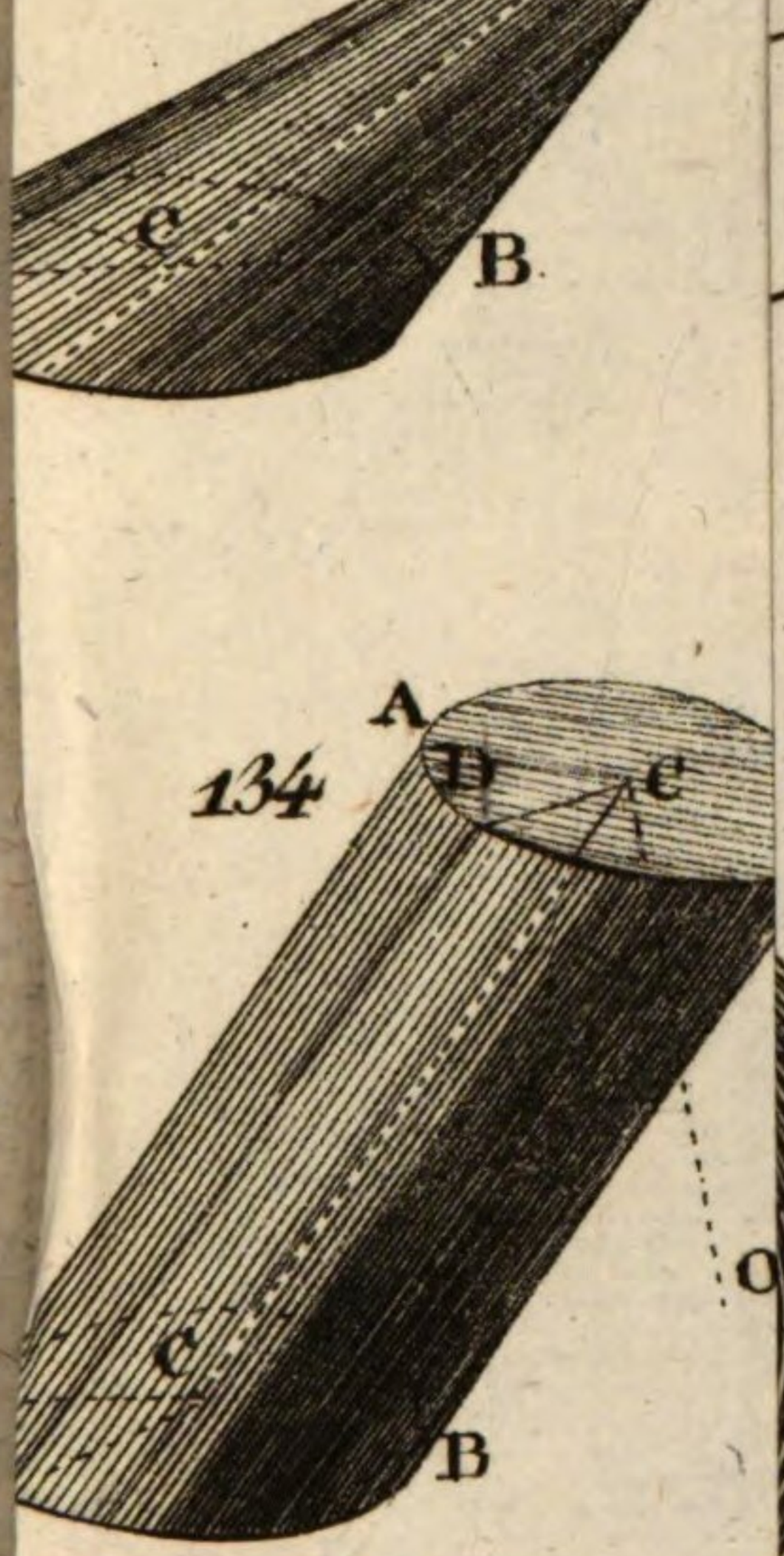




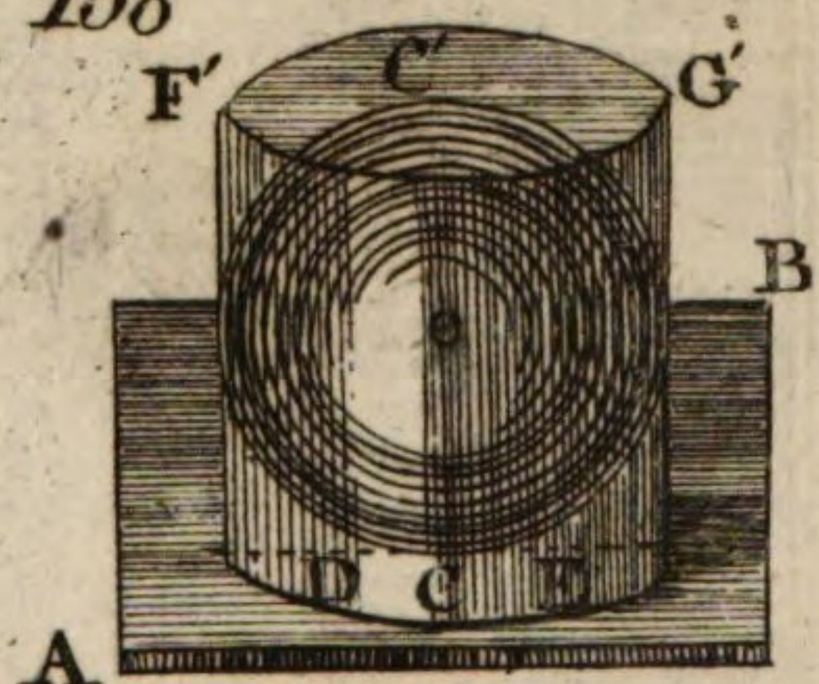
137.



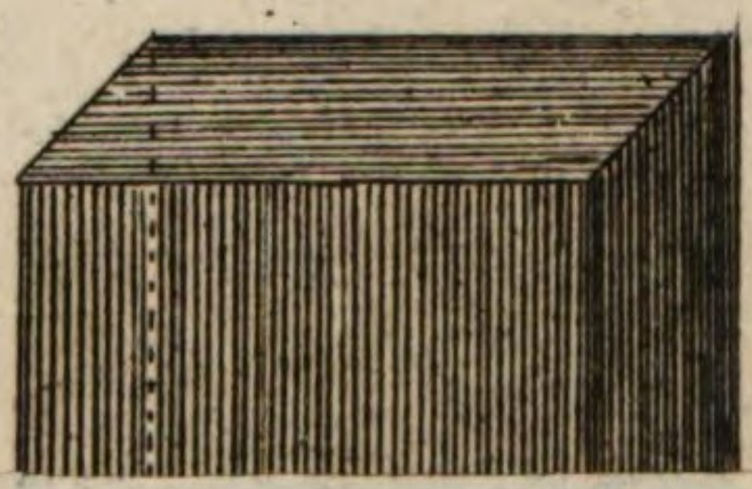
134



138



143



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lacroix, S. F.,

Silv. Franc. Lacroix's Anfangsgründe der Geometrie nebst einer Abhandlung ü
ber die ... zu befolgende Ordnung, über die Art sie abzufassen, und über
die Methode in den mathematischen Wissenschaften überhaupt

Berlin 1806

Math.p. 268
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082203-5